ΑΠΕΙ 1

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

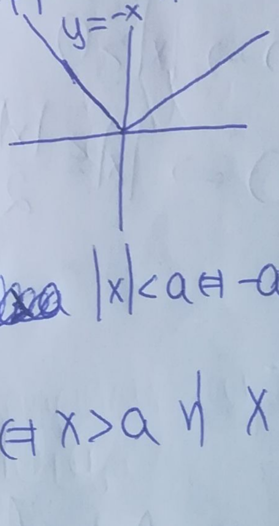
f (γνησίως) αύξουσα ή (γνησίως) φθίνουσα

αν $\forall\, x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$, ισχύει: $(f(x_1) < f(x_2))$ $f(x_1) \leq f(x_2)$ ή $(f(x_1) > f(x_2))$ $f(x_1) \geq f(x_2)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ημx$ όχι αύξουσα ή φθίνουσα
- $g: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ $g(x) = ημx$ $\left(g = f\big|_{[0, \frac{\pi}{2}]}\right)$ γν. αύξουσα
- f αύξουσα και φθίνουσα στο A $\Longleftrightarrow$ f: σταθερή στο A
- Αν f (γνησίως) αύξουσα ή φθίνουσα $\Rightarrow$ f λέγεται (γνησίως) μονότονη
- Αν f γνησίως μονότονη, τότε η f "1-1" (αμφιμονοσήμαντη)

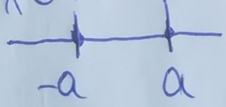
Απόλυτη τιμή: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



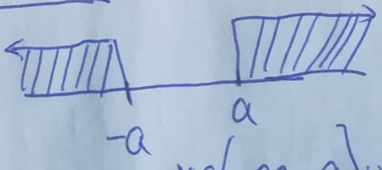
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- $|x| \leq a \ (>0) \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$ και $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| \geq a \ (a>0) \Leftrightarrow x \geq a$ ή $x \leq a$ και $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ή $x < -a$

$\boxed{|x| \leq a}$: $x \in [-a, a]$



$\boxed{|x| \geq a}$



$x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$

- $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|\ ,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
- $|x+y| \le |x|+|y|\ ,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (Τριγωνική ανισότητα)

<u>Απόδειξη</u>

$$2xy \le 2|x||y| \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \le |x|^2+2|x||y|+|y|^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \le (|x|+|y|)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x+y| \le \big||x|+|y|\big| \Leftrightarrow |x+y| \le |x|+|y|$$

- $\sqrt{|x|+|y|} \le \sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\ ,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
- $\sqrt{x^2+y^2} \le |x|+|y|\ ,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
- Έστω ότι $|x|\le\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0$. Τότε $x=0$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι $x\neq 0 \Rightarrow |x|>0$

Για $\varepsilon=\frac{|x|}{2}>0 \Rightarrow |x|\le\frac{|x|}{2} \Rightarrow 1\le\frac{1}{2}$, άτοπο.

Οπότε $\boxed{x=0.}$

Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$

Αν $\exists\, b\in A$, τ.ω. $\forall x\in A, x\le b$ τότε το b λέγεται μέγιστο στοιχείο του A.

<u>Συμβ</u>: $b=\max A$

Αν $\exists\, a\in A, \forall x\in A, x\ge a$, τότε το a λέγεται ελάχιστο στοιχείο του A.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(1) A πεπερασμένο $\subseteq \mathbb{R}$

Π.χ. $A=\{1,2,3\}$, $\max A=3$ $\min A=1$

έχει μέγιστο και ελάχιστο

(2) $[a,b]$, $\max[a,b]=b$ $\min[a,b]=a$

(3) $[a,+\infty)$ $\max[a,+\infty)$ δεν υπάρχει

$\min[a,+\infty)=a$

(4) (a,b) Δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Έστω $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$

- $\frac{1}{2}\cdot\left[a+b-|a-b|\right]=\frac{a+b+a-b}{2}=a=\min\{a,b\}$

- $\frac{1}{2}\cdot\left[a+b+|a-b|\right]=\frac{a+b+b-a}{2}=b=\max\{a,b\}$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ
(πρόταση)

Έστω $P(n)$ μία ιδιότητα πάνω στο $\mathbb{N}\cup\{0\}$

Έστω ότι ισχύουν τα εξής:

(1) Για κάποιο $k\in\mathbb{N}$, η $P(k)$ είναι αληθής. → βάση της επαγωγής

(2) Αν για $n\geq k$ η $P(n)$ είναι αληθής, τότε $P(n+1)$ είναι αληθής.

Τότε η $P(n)$ είναι αληθής, $\forall n\geq k$. → επαγωγικό βήμα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

(1) $P_n: 1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(3) - Η $P(1)$ ισχύει.
(Για $n=1$ ισχύει)

· Έστω ότι ισχύει η $P(n)$
(Έστω ότι ισχύει για n)
όπου $n \geq 1$

<u>Θ.δ.ο.</u> ισχύει η $P(n+1)$

$$P(n+1): 1+2+\ldots+n+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$(1+2+\ldots+n)+(n+1)\xlongequal{P(n)\text{ αληθής}}\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Οπότε $P(n+1)$ αληθής

$\Rightarrow P(n)$ αληθής, $\forall n \geq 1$

(2) $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$$P(n): 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(1) Η $P(1)$ ισχύει.
(2) Έστω ότι $P(n)$ είναι αληθής $(n \geq 1)$
Θ.δ.ο. ισχύει η $P(n+1)$

$$P(n+1)=1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2\xlongequal{P(n):\text{ αληθής}}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6}=$$

$$=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

(3) $2n+1 \leq 2^n$, $\forall n \geq 3$

$P(n): 2n+1 \leq 2^n$

$P(3)$ αληθής

Έστω ότι $P(n)$: αληθής, όπου $n \geq 3$

Θ.δ.ο. ισχύει η $P(n+1)$

$P(n+1): 2(n+1)+1 \leq 2^{n+1} \Leftrightarrow 2n+3 \leq 2^{n+1}$

$$2n+3 = (2n+1)+2 \underset{\text{αληθής}}{\overset{P(n)}{\leq}} 2^n+2 \leq 2^n+2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Η $P(n+1)$ είναι αληθής

Οπότε η $P(n)$ είναι αληθής.

9-10-19

$2^n \geq n^2$, $\forall n \geq 4 : P(n)$

$P(4)$ ισχύει

Έστω ότι η $P(n)$ ισχύει (για $n \geq 4$)

Θ.δ.ο. $P(n+1)$ ισχύει

$P(n+1): (n+1)^2 \leq 2^{n+1}$

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 \underset{\text{αληθής}}{\overset{P(n)}{\leq}} 2^n+2n+1 \leq 2^n+2^n = 2\cdot 2^n = 2^{n+1}$$

$\Rightarrow P(n+1)$ ισχύει

Άρα $P(n)$ ισχύει $\forall n \geq 4$

ΑΞΙΩΜΑ (Αρχή της καλής διάταξης στους φυσικούς ή Αξίωμα του ελαχίστου)

Έστω $S \overset{\neq\emptyset}{\subseteq} \mathbb{N} \cup \{0\}$. Τότε το S έχει ελάχιστο στοιχείο.
Τότε $\exists a \in S$, τ.ω. $\forall n \in S$, $a \leq n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $S \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ και έστω $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
Υποθέτουμε ότι: (i) $k \in S$, (ii) Αν $n \geq k$, $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$
Τότε $S \supseteq \{k, k+1, k+2, \dots\} = \mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n \geq k\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι $S \not\supseteq \mathbb{N}_k$. Άρα το σύνολο $T = \mathbb{N}_k \setminus S \neq \emptyset$

$\xrightarrow[\text{ελαχίστου}]{\text{Αξίωμα του}} \exists a \in T$, τ.ω. $a = \min T$

Από υπόθεση: $a > k \Rightarrow a \geq k+1$

$\xrightarrow[(a-1) \in \mathbb{N}_k]{a-1 \geq k} (a-1) \in S \overset{\text{Υποθ.}}{\Rightarrow} \underbrace{(a-1+1)}_{a} \in S$ Άτοπο γιατί $S \not\supseteq \mathbb{N}_k$

ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

Έστω $P(n)$ μία πρόταση, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
Έστω $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Υποθέτουμε:
(i) $P(k)$ αληθής
(ii) $\forall n \geq k$, αν $P(n)$ αληθής, τότε $P(n+1)$ αληθής
Τότε $P(n)$ αληθής, $\forall n \geq k$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτουμε $S = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : P(n) \text{ αληθής}\}$

(i) $k \in S$
(ii) Αν $n \geq k$, τ.ω. $n \in S \Rightarrow P(n)$: αληθής $\Rightarrow P(n+1)$ αληθής $\Rightarrow$
$\Rightarrow (n+1) \in S \xrightarrow{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}} S \supseteq \{k, k+1, k+2, \dots\}$

$\Rightarrow P(n)$: αληθής, $\forall n \geq k$

· Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το A ονομάζεται <u>άνω φραγμένο</u> αν $\exists M \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\forall x \in A$ να ισχύει $x \leq M$

<u>π.χ.</u> $(0,1)$, $(-\infty, 0]$, $\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 0\}$, $[1,2] \cup [3,4]$, κάθε πεπερασμένο σύνολο.

· Το M λέγεται <u>άνω φράγμα</u> του A.

π.χ. $(0,+\infty)$, $\mathbb{R}$, $(1,+\infty)$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ δεν είναι άνω φραγμένα σύνολα.

· Αν $\exists \max A = M$. Τότε $M \geq x$, $\forall x \in A \Rightarrow M$: άνω φράγμα του A

· $A \subseteq \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο, αν $\exists m \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\forall x \in A$, $m \leq x$

Τότε το m ονομάζεται <u>κάτω φράγμα</u> του A

<u>π.χ.</u> $(0,1)$, $\mathbb{N}$, $(0,\infty)$ είναι κάτω φραγμένα

$(-\infty, a]$ δεν είναι κάτω φραγμένο.

· Αν M άνω φράγμα του A, τότε $\forall M' \geq M$, M': άνω φράγμα του A

Αν m κάτω φράγμα -||- -||- $\forall m' \leq m$, m': κάτω -||- -||-

· A φραγμένο αν είναι άνω <u>και</u> κάτω φραγμένο $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}$, τ.ω. $\forall x \in A$, $m \leq x \leq M$

π.χ. $(0,1)$, $\{1,2,3\}$, $[0,1] \cup (2,4)$ είναι φραγμένα σύνολα

$(0,+\infty)$, $(-\infty,1)$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ όχι φραγμένα.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. A: φραγμένο $\iff \exists M>0$, τ.ω. $\forall x\in A$, [redacted] $|x| \leq M$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

"$\Leftarrow$" $\forall x \in A$, $-M \leq x \leq M$

$\Rightarrow -M$: κάτω φράγμα, M: άνω φράγμα

$\Rightarrow A$: φραγμένο

"$\Rightarrow$" Θέτω $N = \max\{|m|, |M|\}$?

$m \leq x \leq M, \forall x \in A \Rightarrow \forall x \in A, -N \leq x \leq N$

$(m \geq -N,\ M \leq N)$

$M \leq |M| \leq \max\{|m|,|M|\} = N$

$-m \leq |m| \leq \max\{|m|,|M|\} = N$

$-m \leq N \Rightarrow m \geq -N$

• Έστω ότι $A \subseteq \mathbb{R}$: άνω φραγμένο (κάτω ή απλώς φραγμένο) και $B \subseteq A$. Τότε B: άνω φραγμένο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\exists M \in \mathbb{R}$, τ.ω. $\forall x \in A$, $x \leq M$

Έστω $x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \leq M \Rightarrow M$: άνω φράγμα του B

$\Rightarrow B$: άνω φραγμένο

• $[0,1)$. Το 1 δεν είναι μέγιστο του $[0,1)$. Είναι όμως το ελάχιστο από όλα τα άνω φράγματα του $[0,1)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$ (άνω φραγμένο). Αν $\exists M \in \mathbb{R}$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) M: άνω φράγμα του A

(ii) Αν M': άνω φράγμα του A τότε $M \leq M'$ (M είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A)

Τότε το M λέγεται supremum του A και συμβολίζεται με $M = \sup A$

· Αν A όχι άνω φραγμένο τότε $\sup A = +\infty$.

· Έστω $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$, κάτω φραγμένο. Αν $\exists m \in \mathbb{R}$, τ.ω. να ισχύουν:

(i) m κάτω φράγμα του A

(ii) $\forall m'$: κάτω φράγμα του A, $m' \leq m$ (Δηλ. το m είναι το μέγιστο κάτω φράγμα)

Τότε το m ονομάζεται infimum του A και συμβολίζεται με $\inf A$.

· Αν A όχι κάτω φραγμένο, τότε $\inf A = -\infty$.

ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

Έστω $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$, άνω φραγμένο. Τότε $\exists \sup A$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$, κάτω φραγμένο. Τότε $\exists \inf A$.

· Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ τ.ω. $\exists M = \max A$

$\Rightarrow M = \sup A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$M = \max A \Longleftrightarrow \forall x \in A, x \leq M$ και $M \in A$

$\Rightarrow M$: άνω φράγμα του A

Έστω M': άνω φράγμα του A

$\Rightarrow M' \geq x, \forall x \in A \xrightarrow{M \in A} M \leq M'$

Άρα $M = \sup A$.

· Ομοίως αποδεικνύουμε ότι αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τ.ω. $\exists m = \min A$ τότε
$m = \inf A$

· Εξ' ορισμού $\inf \emptyset = +\infty$
$\sup \emptyset = +\infty$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> (ΘΕΩΡΗΜΑ)

$\exists m \in \mathbb{R}$, τ.ω. $\forall x \in A$, $x \geq m$

Ορίζουμε $-A = \{-x : x \in A\}$. Έχουμε $\forall y \in -A$

$y \leq -m \Rightarrow -A$: άνω φραγμένο $\xrightarrow[\text{ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ}]{\text{ΑΞΙΩΜΑ ΤΗΣ}} \exists M \in \mathbb{R}$ τ.ω. $M = \sup(-A)$

<u>Θ.δ.ο.</u> $-M = \inf A$

(i) $M = \sup(-A) \Rightarrow M$: άνω φράγμα του $-A \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall y \in -A, y \leq M$

$\xrightarrow{y=-x} \forall x \in A, x \geq -M \Rightarrow -M$: κάτω φράγμα του A

(ii) Έστω N: κάτω φράγμα του $A \Rightarrow \forall x \in A, x \geq N \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall y \in -A, y \leq -N \Rightarrow -N$: άνω φράγμα του $-A$

$\xrightarrow{M = \sup(-A)} -N \geq M \Rightarrow -M \geq N$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x < n$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω ότι $\exists x\in\mathbb{R}$, τ.ω. $x\geq n, \forall n\in\mathbb{N}$

Άρα το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο.

Άρα $\exists a\in\mathbb{R}$, τ.ω. $a=\sup\mathbb{N}$

<u>Θ.δ.ο.</u> $a\in\mathbb{N} \Rightarrow a=\max\mathbb{N}$, άτοπο γιατί $a+1\in\mathbb{N}$ και $a+1>a$

Έστω ότι $a\notin\mathbb{N} \Rightarrow \exists k\in\mathbb{N}$ τ.ω. $a-1<k<a \Rightarrow$

$\Rightarrow a<k+1<a+1$, άτοπο.

2ος ΤΡΟΠΟΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ 14-10-19

Αν όχι, $\exists a=\sup\mathbb{N}<\infty$

$\forall n\in\mathbb{N}, n\leq a \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}, n+1\leq a \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}, n\leq a-1$, άτοπο γιατί $a=\sup\mathbb{N}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

(1) $A=\left\{1-\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$

Να βρεθούν τα $\sup A, \inf A$.

ΛΥΣΗ

- $1-\frac{1}{n}\geq 0, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \forall x\in A, x\geq 0$ <u>και</u> $0\in A \Rightarrow 0=\min A \Rightarrow$

  $\Rightarrow \boxed{\inf A=0}$

- (i) $1-\frac{1}{n}\leq 1, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow 1$: άνω φράγμα του A

(ii) Αν M: άνω φράγμα του A τότε <u>Θ.δ.ο.</u> $M\geq 1$

$\Rightarrow M\geq x, \forall x\in A \Rightarrow M\geq 1-\frac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n}\geq 1-M, \forall n\in\mathbb{N}$

Έστω $M<1 \Rightarrow 1-M>0 \Rightarrow n \leq \frac{1}{1-M}, \forall n \in \mathbb{N}$, άτοπο από Αρχιμήδεια Ιδιότητα
$= x$

$\Rightarrow M \geq 1 \Rightarrow \boxed{\sup A = 1}$

2) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2+1$
Θέτουμε $A = f((0,2)) = (1,5)$
Να βρεθούν τα $\sup A, \inf A$.

ΛΥΣΗ

Θ.δ.ο. $\inf A = 1$

(i) 1: κάτω φράγμα του A
(ii) Έστω M: κάτω φράγμα του A
Θ.δ.ο. $M \leq 1$.
Έστω ότι $M>1 \Rightarrow \forall x \in (1,5): x \geq M$
$\exists x \in (1,M), x \in A \Rightarrow x < M$ άτοπο
Ομοίως, $\sup A = 5$ (ΑΣΚΗΣΗ ΣΠΙΤΙ)

Γενικά $\sup((a,b)) = b$, $\inf((a,b)) = a$

(3) $A = \left\{ \frac{n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \dots \right\}$

$\sup A, \inf A =;$

ΛΥΣΗ

Θ.δ.ο. $\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \Rightarrow n\left((n+1)^2+1\right) - (n^2+1)(n+1) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow n(n^2+2n+1+1) - (n^3+n^2+n+1) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{n^3} + 2n^2 + 2n - \cancel{n^3} - n^2 - n - 1 \geq 0 \Rightarrow n^2+n-1 \geq 0$, το οποίο

$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{2}{5} \geq \frac{3}{10} \geq \dots \geq \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \geq \dots$

$\Rightarrow \max A = \frac{1}{2} \Rightarrow \sup A = \max A = \frac{1}{2}$

· <u>Θ.δ.ο</u> $\inf A = 0$

(i) 0: κάτω φράγμα του A

(ii) Έστω m: κάτω φράγμα του A

<u>Θ.δ.ο</u> $m \leq 0$

Έστω $m > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \frac{n}{n^2+1} \geq m \Rightarrow (n^2+1)m \leq n \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 m + m \leq n$
Επίσης $n^2 m + m > n^2 m$ $\Big\} \Rightarrow n^2 m \leq n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n \leq \frac{1}{m},\ \forall n \in \mathbb{N}$, άτοπο από Αρχιμήδεια ιδιότητα

Οπότε $\boxed{\inf A = 0}$

· Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $x - 1 \leq [x] \leq x$

π.χ. $[-2,5] = -3$

$[3,67] = 3$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $\exists!\, a \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $x - 1 < a \leq x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a \leq x < a + 1)$

<u>Συμβολισμός</u>: $a = [x]$ (ακέραιο μέρος του x)

ΠΟΡΙΣΜΑ

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $k < x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\exists m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $m > |x| \geq -x \Rightarrow$

$\Rightarrow m \geq -x \Rightarrow -m \leq x \Rightarrow x \geq -m$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(Ύπαρξη)

$\exists k, m \in \mathbb{Z} : k < x < m$

Θέτουμε $A = \{n \in \mathbb{N} : x < k + n\} \subseteq \mathbb{N}$

$A \neq \emptyset$ (π.χ. $(m-k) \in A$)

$\xRightarrow[\text{ΚΑΛΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ}]{\text{ΑΡΧΗ ΤΗΣ}} \exists n_0 = \min A \in \mathbb{N}$

· Αν $\boxed{n_0 = 1}$: $k \leq x < k+1 \Rightarrow$ ισχύει για $a = k$

· Αν $\boxed{n_0 > 1}$: $x \geq k + n_0 - 1,\ x < k + n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k + n_0 - 1 \leq x < k + n_0 \xRightarrow{a = k + n_0 - 1} a \leq x < a + 1$

(Μοναδικότητα)

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$, τ.ω. $x - 1 < a \leq x$
$x - 1 < b \leq x$

Θ.δ.ο. $\boxed{a = b}$

Έστω ότι $a \neq b$

Έστω π.χ. ότι $a < b \Rightarrow a + 1 \leq b \Leftrightarrow a \leq b - 1$

$a - 1 \leq x - 1 < b \leq x < a + 1 \leq b \Rightarrow b < b$, άτοπο

Οπότε $\boxed{a = b}$

16-10-19

16

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΡΗΤΩΝ-ΑΡΡΗΤΩΝ)

Έστω $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Τότε:

(i) $\exists q \in (a,b), q \in \mathbb{Q}$

(ii) $\exists r \in (a,b), r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$\left(\frac{2}{b-a} > 0\right.$ αφού $2>0$ και $\left.a<b\right)$

(i) Έστω $n \in \mathbb{N}$, με $n > \frac{2}{b-a}$

$\Rightarrow b \cdot n - a \cdot n > 2 \Rightarrow an < b \cdot n - 2$ $\quad (nb-1-1 \leq nb-1 \leq nb)$

Θέτουμε $m = [nb-1] \overset{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}{\Rightarrow} nb-2 < m \leq nb-1 < nb$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$, τ.ω. $an < b < b \cdot n \Rightarrow a < \frac{m}{n} < b$

$\Rightarrow a < q < b$, όπου $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

(ii) <u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u>: Υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος αριθμός, ο οποίος είναι ο $\sqrt{2}$.

Από το (i) $\Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $q \in \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$

$\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow a < \sqrt{2} \cdot q < b$

Ο $\sqrt{2} \cdot q$ είναι άρρητος γιατί αν ήταν ρητός $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot q = \frac{m}{n} \left(\begin{matrix} m, n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0 \end{matrix}\right)$. Επειδή $q \in \mathbb{Q}$, $\exists m', n' \in \mathbb{Z}$ τ.ω. $q = \frac{m'}{n'}$ $(n' \neq 0)$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{mn'}{m'n} \in \mathbb{Q}$, άτοπο από τον ισχυρισμό.

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{Z}$. Αν το A είναι άνω φραγμένο, τότε το $\sup A \in A$ $\Leftrightarrow \exists \max A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $M = \sup A \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$

Τότε, $\exists x \in A$ τ.ω. $x > M - \varepsilon$

ελάχιστο άνω φράγμα

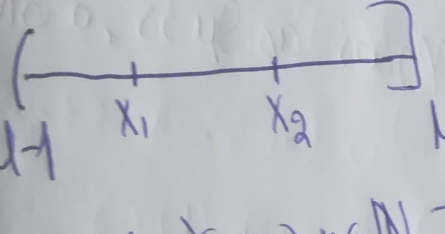
Αν όχι, $\forall x \in A$, $x \leq M - \varepsilon \Rightarrow M - \varepsilon$: άνω φράγμα του A, άτοπο διότι $M = \sup A$.

Για $\varepsilon = 1$: $\exists x_1 \in A$: $x_1 > M - 1$

Για $\varepsilon = M - x_1 > 0$ (γιατί M: άνω φράγμα του A και $M \notin A$):

$$\exists x_2 \in A : x_2 > M - \varepsilon = M - (M - x_1) = x_1 \Rightarrow x_2 > x_1$$

Άρα, $M - 1 < x_1 < x_2 \leq M$



$\rightarrow 0 < x_2 - x_1 < 1$, άτοπο γιατί $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\exists m$: περιττός τ.ω.

$$n = 2^k \cdot m$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ορίζουμε $A = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \frac{n}{2^k} \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{Z}$

Αν $k \in A$

A: φραγμένο γιατί: $\frac{n}{2^k} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n}{2^k} \geq 1 \Rightarrow 2^k \leq n \Rightarrow k \leq n$

$\overset{\text{ΑΣΚΗΣΗ}}{\Longrightarrow} \exists k_0 = \max A \Rightarrow \frac{n}{2^{k_0}} \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}, m = \frac{n}{2^{k_0}}$

$\Rightarrow n = m \cdot 2^{k_0}$

<u>Ο.δ.ο.</u> m: περιττός

Αν m: άρτιος $\Rightarrow m = 2m'$, για κάποιο $m' \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 2^{k_0} \cdot 2m' \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 2^{k_0+1} \cdot m' \Rightarrow \frac{n}{2^{k_0+1}} \in \mathbb{N} \Rightarrow (k_0+1) \in A$, άτοπο γιατί $k_0 = \max A$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: $\sqrt{2}$ είναι άρρητος ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω ότι $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> $\Rightarrow \exists m_1, m_2$: περιττοί και $k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τ.ω. $m = 2^{k} \cdot m_1$,

$n = 2^{k} \cdot m_2$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2^{k_1} \cdot m_1}{2^{k_2} \cdot m_2} \Rightarrow 2 = \left(\frac{2^{k_1} \cdot m_1}{2^{k_2} \cdot m_2}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{2^{2k_1} \cdot m_1^2}{2^{2k_2} \cdot m_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = 2^{2(k_1 - k_2)} \cdot \frac{m_1^2}{m_2^2}$$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ</u>

1 $\boxed{k_1 > k_2}$

$$2m_2^2 = 2^{2(k_1-k_2)} m_1^2 \Rightarrow \underset{\text{περιττός}}{m_2^2} = \underbrace{2^{\overbrace{2(k_1-k_2)-1}^{\geq 1}} \cdot m_1^2}_{\text{άρτιος}}$$, άτοπο

② $\boxed{k_1 \leq k_2}$

$2 \cdot 2^{2(k_2-k_1)} \cdot m_2^2 = m_1^2 \Rightarrow \underbrace{2^{2(k_2-k_1)+1}}_{\text{άρτιος}} \cdot m_2^2 = \underbrace{m_1^2}_{\text{περιττός}}$, άτοπο

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $a<b$. Τότε, υπάρχουν άπειροι ρητοί και άπειροι άρρητοι στο (a,b).

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$, $M, m \in \mathbb{R}$.

(i) $M = \sup A \iff M$: άνω φράγμα του A και $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$, τ.ω. $x > M - \varepsilon$

(ii) $m = \inf A \iff m$: κάτω φράγμα του A και $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ τ.ω. $x < m + \varepsilon$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) "$\Longrightarrow$"

$M = \sup A$. Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε $\exists \varepsilon > 0$, τ.ω. $\forall x \in A$ $x \geq M - \varepsilon$ (ορισμός supremum)

$\Rightarrow (M-\varepsilon)$: άνω φράγμα του A, άτοπο γιατί $M = \sup A$

"$\Longleftarrow$" M: άνω φράγμα του A

Έστω M': -״- -״- . Αρκεί ν.δ.ο. $M \leq M'$

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists x \in A$, τ.ω $M \geq x > M - \varepsilon$

$\Rightarrow M' > M - \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow M' \geq M$. Έστω ότι $M' < M \Rightarrow M - M' > 0$

Για $\varepsilon = M - M'$: $M' > M - (M - M') = M'$

Ομοίως για το $\inf A = m$.

(ii) " $\Longrightarrow$ " $m = \inf A \Rightarrow m$: κάτω φράγμα του A

Έστω ότι δεν ισχύει: "$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$ τ.ω. $x < m + \varepsilon$"

Τότε: $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, x \geq m + \varepsilon \Rightarrow m + \varepsilon$: κάτω φράγμα του A,

άτοπο γιατί $m = \inf A$ και $m + \varepsilon > m$.

" $\Longleftarrow$ " m: κάτω φράγμα του A

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A$, τ.ω. $x < m + \varepsilon$

Έστω $\varepsilon > 0, \exists x \in A$, τ.ω. $x < m + \varepsilon$

Έστω m': κάτω φράγμα του A.

$\Rightarrow m' \leq x < m + \varepsilon$

$\Rightarrow m' < m + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow m' \leq m \Rightarrow m = \inf A$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

Να βρεθούν τα sup, inf των συνόλων $A = \left\{1 - \frac{1}{n^4} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

$B = \left\{e^{-n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$\cdot 1-\frac{1}{n}\geq 0$, $0\in A \Rightarrow 0=\min A \Rightarrow \boxed{0=\inf A}$
$\forall n\in\mathbb{N}$

<u>Ν.δ.ο.</u> $1=\sup A$

(i) $1\geq 1-\frac{1}{n^4}$, $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow 1$: άνω φράγμα του A

(ii) Αρκεί ν.δ.ο. $\forall \varepsilon>0, \exists x\in A$ τ.ω. $x>1-\varepsilon$

Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητώ $x\in A$, τ.ω. $x>1-\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ Αναζητώ $n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $1-\frac{1}{n^4}>1-\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^4}<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n>\sqrt[4]{\varepsilon^{-1}}$.

Από Αρχιμήδεια Ιδιότητα, $\exists n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $n>\sqrt[4]{\frac{1}{\varepsilon}}$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{n^4}>1-\varepsilon$ δηλ. $\exists x\in A$ τ.ω. $x>1-\varepsilon$

$\cdot B=\{e^{-n}: n\in\mathbb{N}\}$

$e^{-n}>e^{-(n+1)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow e^{-1}=\max B \Rightarrow \sup B=e^{-1}$

Ν.δ.ο. $0=\inf B$

(i) 0: κάτω φράγμα του B

(ii) Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητώ $x\in B$ τ.ω. $x<0+\varepsilon=\varepsilon \Rightarrow x<\varepsilon$

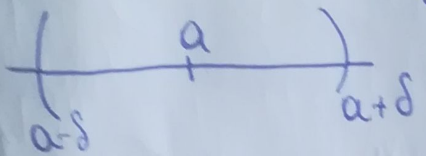
$\Leftrightarrow$ Αναζητώ $n\in\mathbb{N}$, τ.ω. $e^{-n}<\varepsilon \Leftrightarrow e^{n}>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Από Αρχιμήδεια Ιδιότητα $\exists n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $n>\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Leftrightarrow e^{-n}<\varepsilon$

Δηλ. $\exists x\in B$ τ.ω. $x<\varepsilon$

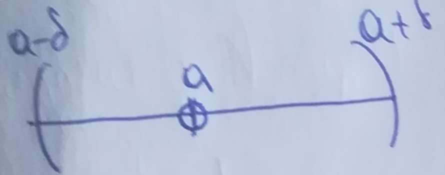
• Έστω $a\in\mathbb{R}$. $N_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta)$ όπου $\delta>0$.

↳ περιοχή του a.



• Το δ λέγεται <u>ακτίνα</u>.

• $N^*_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$: δακτυλιωτή περιοχή του a με ακτίνα δ.



• Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$.
Το $a\in\mathbb{R}$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του A, αν:
$\forall\delta>0,\ N^*_\delta(a)\cap A\neq\emptyset$

<u>π.χ.</u>

(1) $(0,1]$

Έστω $x\in(0,1]$
Τότε x σ.σ. του $(0,1]$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $\delta>0$. Τότε $\big((x-\delta,x+\delta)\setminus\{x\}\big)\cap(0,1]$: διάστημα

0 είναι σ.σ. του $(0,1]$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $\delta>0$. $N^*_\delta(0)\cap(0,1]=\big((-\delta,\delta)\setminus\{0\}\big)\cap(0,1]=$

$$=\begin{cases}(0,\delta], & \delta\le 1\\ (0,1], & \delta>1\end{cases}\neq\emptyset$$

Έστω $x \notin [0,1]$ τότε x: όχι σ.σ. του $(0,1]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

(1) $\boxed{x<0}$

Έστω $\delta = \frac{|x|}{2} > 0 \Rightarrow N_\delta^*(x) = \left(x - \frac{|x|}{2}, x + \frac{|x|}{2}\right) \setminus \{x\}$

$= \left(\frac{3x}{2}, \frac{x}{2}\right) \setminus \{x\}$

$\Rightarrow N_\delta^*(x) \cap (0,1] \Rightarrow x$: όχι σ.σ.

(2) $\boxed{x>1}$

Για $\delta = \frac{x-1}{2} > 0$, $N_\delta^*(x) = (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$

$= \left(\frac{x+1}{2}, \frac{3x-1}{2}\right) \setminus \{x\}$

$\Rightarrow N_\delta^*(x) \cap (0,1] = \emptyset$

- A': σύνολο όλων των σ.σ. του A (παράγωγο σύνολο του A)
- $\bar{A} = A \cup A'$ (κλειστή θήκη του A)

ΟΡΙΣΜΟΣ

A λέγεται κλειστό αν $A \supseteq A' \Leftrightarrow A = \bar{A}$

24

21-10-19

$A \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$

a σ.σ. του A, αν $\forall \delta > 0$, $\underset{(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}}{N^*_\delta(a)} \cap A \neq \emptyset$

· A' (παράγωγο σύνολο του A) = σύνολο των σ.σ. του A

$(a,b)' = [a,b]$, $(a,b]' = [a,b]$, $[a,b)' = [a,b]$, $[a,b]' = [a,b]$

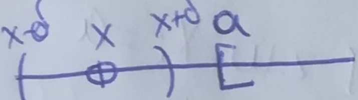
· A κλειστό $\Leftrightarrow A \supseteq A'$ $(A' \subseteq A)$

· $\bar{A} = A \cup A'$

<u>π.χ.</u> $[a, +\infty)$: κλειστό

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $x < a$. <u>Θ.δ.ο.</u> x όχι σ.σ.



Για $\delta = \frac{a-x}{2} > 0$, $N^*_\delta(x) = (x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}$

$= \left(\frac{3x-a}{2}, \frac{x+a}{2}\right) \setminus \{x\} \subseteq (-\infty, a)$

$\Rightarrow N^*_\delta(x) \cap A = \emptyset$

Άρα $x \notin A'$ (x: όχι σ.σ. του A)

$\Rightarrow A' \subseteq [a, +\infty) \Rightarrow [a, +\infty) = A$: κλειστό

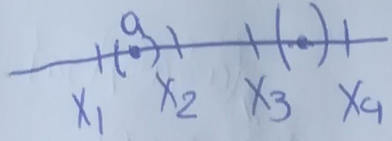
· Ισχύει $[a, +\infty)' = [a, +\infty)$

$(-\infty, a]' = (-\infty, a]$

$(a, +\infty)' = [a, +\infty)$, $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$

$(-\infty, a)' = (-\infty, a]$

π.χ. $A=\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$



Το A δεν είναι κλειστό.

ΛΥΣΗ

Θέτω $\delta=\min\{|x_i-x_j| : i\neq j,\ i,j=1,\dots,k\}$

Έστω $a\in\mathbb{R}$, $\delta_a=\min\{|a-x_i|,\ i=1,\dots,k\}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

(1) $\boxed{\delta_a>0} \Rightarrow a\neq x_i,\ \forall i=1,\dots,k$

$N^*_{\delta_a}(a)=(a-\delta_a,a+\delta_a)\setminus\{a\}\subseteq\mathbb{R}\setminus A \Rightarrow N^*_{\delta_a}(a)\cap A=\emptyset$

(2) $\boxed{\delta_a=0}$

$\Rightarrow \exists i\in\{1,\dots,k\}$ τ.ω. $x_i=a$

$\Rightarrow N^*_\delta(a)\cap A=\emptyset \Rightarrow a$: όχι σ.σ. του A

$\Rightarrow A'=\emptyset$

Ομοίως αποδεικνύουμε $\mathbb{N}'=\emptyset$, $\mathbb{Z}'=\emptyset$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Πεπερασμένα σύνολα είναι κλειστά.

$\cdot\ \mathbb{Q}'=\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $a\in\mathbb{R}$ εξωτερικό σημείο του A αν $x\notin A$ ($x\in A^c=\mathbb{R}\setminus A$)

ΟΡΙΣΜΟΣ $a\in\mathbb{R}$ συνοριακό σημείο του A αν $\forall\delta>0$, $N^*_\delta(a)\cap A\neq\emptyset$

$N^*_\delta(a)\cap A^c\neq\emptyset$

π.χ. $[a,b]$: a συνοριακό σημείο

ΟΡΙΣΜΟΣ: $a\in\mathbb{R}$ εσωτερικό σημείο του A αν $\exists\delta>0$ τ.ω.

$$\underset{\displaystyle (a-\delta,a+\delta)}{\underset{\parallel}{N_\delta(a)}}\subseteq A$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\mathring{A}$ = Εσωτερικό του A = Σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A

Π.Χ. $\mathring{\overline{[a,b]}}=(a,b)$

$\mathring{\overline{(a,b)}}=(a,b)$

· A ανοιχτό αν $\mathring{A}=A$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$, a σ.σ. του A.
Τότε $\forall\delta>0$ η $N^*_\delta(a)$ περιέχει άπειρα σημεία του A

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

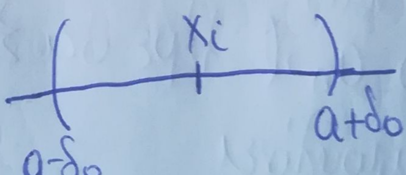
Έστω $\delta>0$. Τότε $N^*_\delta(a)\cap A\neq\emptyset$

Έστω ότι $N^*_\delta(a)\cap A$ πεπερασμένο $\Rightarrow \exists x_1,x_2,\dots,x_k\in A$,

τ.ω. $N^*_\delta(a)\cap A=\{x_1,\dots,x_k\}$

Θέτω $\delta_0=\min\{|x_1-a|,|x_2-a|,\dots,|x_k-a|\}$

$N^*_{\delta_0}(a)\cap A\subseteq N^*_\delta(a)\cap A=\{x_1,\dots,x_k\}$



Για $i\in\{1,\dots,k\}$: $|a-x_i|\geq\delta_0$

$\Rightarrow x_i\notin(a-\delta_0,a+\delta_0)$

$\Rightarrow x_i\notin N^*_{\delta_0}(a)\Rightarrow N^*_{\delta_0}(a)\cap A=\emptyset$, άτοπο

(1)

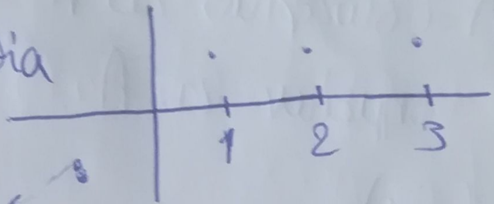
ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

· $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

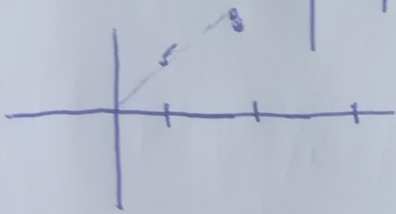
· Συμβολισμός: $a(n) = a_n,\ n\in\mathbb{N}$

· Σύνολο τιμών της $\{a_n\} = \{a_n : n\in\mathbb{N}\} = a(\mathbb{N})$

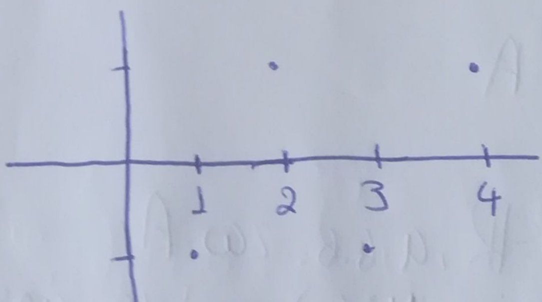
π.χ. $a_n = \ell \in \mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}$: σταθερή ακολουθία



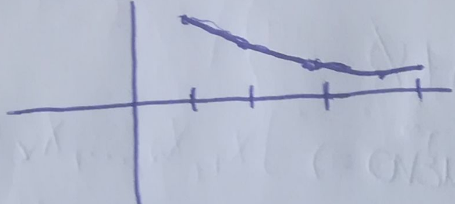
$\boxed{a_n = n,\ n\in\mathbb{N}}$



$\boxed{a_n = (-1)^n,\ n\in\mathbb{N}}$



$\boxed{a_n = \frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}}$



· $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $\ell\in\mathbb{R}$ ($a_n\to\ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, $\lim a_n = \ell$) $\xLeftrightarrow{\text{ορισμός}}$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists \underset{n_0(\varepsilon)}{\overset{}{n_0}}\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq n_0,\ |a_n-\ell|<\varepsilon$

· Αν $\exists \ell\in\mathbb{R}$ τ.ω. $a_n\to\ell$ λέμε ότι $\{a_n\}$ συγκλίνει

· Αλλιώς, $\{a_n\}$ αποκλίνει

23-10-19

(28)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

(1) ν.δ.ο. $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-4}{2-3n} = -\frac{5}{3}$

ΛΥΣΗ

Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητούμε $n_0\in\mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n\geq n_0$, $|a_n-\ell|<\varepsilon$

$|a_n-\ell| = \left|\frac{5n-4}{2-3n}+\frac{5}{3}\right| = \left|\frac{\cancel{15n}-12+10-\cancel{15n}}{6-9n}\right| = \left|\frac{-2}{6-9n}\right| = \frac{2}{9n-6}$

$|a_n-\ell|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{9n-6}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{9}\left(\frac{2}{\varepsilon}+6\right)$

Για $n_0=\left[\frac{1}{9}\left(\frac{2}{\varepsilon}+6\right)\right]+1 \Rightarrow \forall n\geq n_0,\ n\geq\left[\frac{1}{9}\left(\frac{2}{\varepsilon}+6\right)\right]+1>\frac{1}{9}\left(\frac{2}{\varepsilon}+6\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall n\geq n_0,\ |a_n-\ell|<\varepsilon$

$\Rightarrow a_n\to\ell \ \left(\frac{5n-4}{2-3n}\to-\frac{5}{3}\right)$

(2) ν.δ.ο. η $\{a_n\}$, όπου $a_n=(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$ δεν συγκλίνει.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι $\{a_n\}$ συγκλίνει.

$\Rightarrow \exists \ell\in\mathbb{R}$ τ.ω. $a_n\to\ell \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n\geq n_0$ $|a_n-\ell|<\varepsilon$

Για $\boxed{\varepsilon=\frac{1}{2}}$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n\geq n_0$, $|a_n-\ell|<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow |a_{n_0}-\ell|<\frac{1}{2}$ και $|a_{n_0+1}-\ell|<\varepsilon=\frac{1}{2}$

$|a_{n_0}-a_{n_0+1}| = |(a_{n_0}-\ell)+(\ell-a_{n_0+1})| \leq |a_{n_0}-\ell|+|\ell-a_{n_0+1}| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, άτοπο

. Στο (2) παίρναμε $\varepsilon\leq 1$.

• Έστω $A>0$. $a_n \to \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0, |a_n - \ell| < A \cdot \varepsilon$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $\varepsilon>0$. Θέτω $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{A} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0, |a_n - \ell| < A \cdot \varepsilon' = \varepsilon$

• $a_n \to \ell \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n > n_0$ $(\forall n \geq n_0 + 1)$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$

Έστω $A>0$

• $a_n \to \ell \Leftrightarrow \forall A \geq \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0, |a_n - \ell| < \varepsilon$

· Αν $\{a_n\}$ συγκλίνει, τότε $\exists \ell \in \mathbb{R}$ τ.ω. $a_n \to \ell$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Η $\{a_n\}$ συγκλίνει, τότε το όριό της είναι μοναδικό.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω ότι $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ και $a_n \to m \in \mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon>0$. $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_1, |a_n - \ell| < \varepsilon/2$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_2, |a_n - m| < \varepsilon/2$

Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0, |a_n - \ell| < \varepsilon/2$ και $|a_n - m| < \varepsilon/2$

$$|\ell - m| = |(\ell - a_n) + (a_n - m)| \leq |\ell - a_n| + |a_n - m| = |a_n - \ell| + |a_n - m| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, |\ell - m| < \varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{\ell = m}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: $\{a_n\}$ φραγμένη αν $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο $\Leftrightarrow$ $\exists m, M \in \mathbb{R}$, τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq a_n \leq M \Leftrightarrow \exists N > 0$ τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq N$

π.χ. $a_n = n$ όχι φραγμένη από Αρχιμήδεια Ιδιότητα

$a_n = (-1)^n$ φραγμένη

ΘΕΩΡΗΜΑ {ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ π.χ. $a_n=(-1)^n$}

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $a_n \to l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0, |a_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$

Για $\boxed{\varepsilon=1}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $l-1 < a_n < l+1$

Θέτω $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, l-1\}$

$m \leq a_1, m \leq a_2, \dots, m \leq a_{n_0-1}, m \leq l-1 < a_n, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow m \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Θέτω $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, l+1\}$

$M \geq a_1, M \geq a_2, \dots, M \geq a_{n_0-1}, M \geq l+1 > a_n, \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq M$

π.χ. $a_n = \ln n$ όχι φραγμένη $\Rightarrow$ όχι συγκλίνουσα

$a_n = (-1)^n$ φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω ότι $a_n \to l > 0$

Έστω $\varepsilon' > 0$. Ν.δ.ο. υπάρχουν το πολύ πεπερασμένου πλήθους όροι της $\{a_n\}$, τ.ω. $a_n < \varepsilon'$

ΛΥΣΗ

Έστω $\varepsilon>0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow \boxed{l-\varepsilon < a_n} < l+\varepsilon$

Για $\varepsilon = l-\varepsilon' > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $a_n > l-(l-\varepsilon') = \varepsilon'$

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

$a_1, a_2, a_3, \dots : \{a_n\}$

$\underset{b_1}{a_1}, \underset{b_2}{a_3}, \underset{b_3}{a_5}, \underset{b_4}{a_6}, \underset{b_5}{a_7}, \underset{b_6}{a_{10}}, \underset{b_7}{a_{20}}, \dots$: υπακολουθία της $\{a_n\}$

$a_1, a_3, a_6, a_5, a_7, \dots$: όχι υπακολουθία της $\{a_n\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\{a_n\}$ μία πραγματική ακολουθία και $\{k_n\}$ μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (k_n γν. αύξουσα, αν $k_n < k_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$)
Η ακολουθία $\{a_{k_n}\}$ ονομάζεται υπακολουθία της $\{a_n\}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) $a_n = 2^{n-(-1)^n}$

$a_{2n} = 2^{2n-(-1)^{2n}} = 2^{2n-1}$

$a_{2n-1} = 2^{2n-1-(-1)^{2n-1}} = 2^{2n-1+1} = 2^{2n}$

2) $\{a_n\}$,

$a_{2^n}, \; k_n = 2^n$

3) $a_n = συν\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{N}$

$a_{4n} = συν\frac{\pi \cdot 4n}{2} = συν 2\pi n = 1, n \in \mathbb{N}$

$a_{4n-1} = συν\frac{\pi \cdot (4n-1)}{2} = συν\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) = 0, n \in \mathbb{N}$

$a_{4n-2} = συν(2\pi n - \pi) = 1 \quad, n \in \mathbb{N}$

$a_{4n-3} = συν\left(2\pi n - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \quad, n \in \mathbb{N}$

30-10-19

ΘΕΩΡΗΜΑ

$\{a_n\}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

32

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

· Αν $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R} \Rightarrow a_{2n}, a_{2n-1} \to l$

· Έστω ότι $a_{2n}, a_{2n-1} \to l \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_1$:

$$|a_{2n} - l| < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \text{ τ.ω. } \forall n \geq n_2, |a_{2n-1} - l| < \varepsilon$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$

Θ.δ.ο. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

(1) Έστω $n \geq n_0$, n: άρτιος $\Rightarrow n = 2k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2k \geq n_0 \geq 2n_1 \Rightarrow k \geq n_1 \Rightarrow |a_{2k} - l| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

(2) Έστω $n \geq n_0$, n: περιττός $\Rightarrow n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2k-1 \geq n_0 \geq 2n_2 - 1 \Rightarrow k \geq n_2 \Rightarrow |a_{2k-1} - l| < \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\{a_n\}, \{b_n\}$ δύο ακολουθίες και $k, \lambda \in \mathbb{R}$. Αν $a_n \to l \in \mathbb{R}$ και $b_n \to m \in \mathbb{R}$, τότε:

i) $\lim(k \cdot a_n + \lambda \cdot b_n) = k \cdot l + \lambda \cdot m$

(ii) $\lim (a_n \cdot b_n) = l \cdot m$

(iii) $\lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{l}{m}$, $m \neq 0$ $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $\lim |a_n| = |l|$

(v) $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{l}$, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

__ΑΣΚΗΣΗ__ ← (ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΙ ΓΙΑ $\leq$)

Έστω ότι $a_n \geq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to l \in \mathbb{R}$. Νδο $l \geq a$

__ΑΠΟΔΕΙΞΗ__

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$\forall n \geq n_0$, $a_n < l + \varepsilon$. Επίσης $a_n \geq a$

$\Rightarrow l + \varepsilon > a$, $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow l \geq a$

Αν $a_n > a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\not\Rightarrow l > a$

__π.χ.__ $a_n = \frac{1}{n} > 0$

$\lim a_n = 0$

__ΑΠΟΔΕΙΞΗ__ (ΘΕΩΡΗΜΑ)

(i) Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_1$, $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2|\kappa| + 1}$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_2$, $|b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda| + 1}$

Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε $\forall n \geq n_0$, $|(a_n \cdot \kappa + \lambda \cdot b_n) - (\kappa l + \lambda m)| =$

$= |\kappa(a_n - l) + \lambda(b_n - m)| \leq |\kappa| \cdot |a_n - l| + |\lambda| \cdot |b_n - m| <$

$< |k| \cdot \frac{\varepsilon}{2|k|+1} + |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\lambda|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$

(iii) Έστω $\varepsilon>0$. $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_1$, $|a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2|m|+1}$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_2$, $|b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$

Γνωρίζουμε ότι: $\{a_n\}, \{b_n\}$ συγκλίνουν $\Rightarrow \{a_n\}, \{b_n\}$ φραγμένες

$\Rightarrow \exists M_1, M_2 > 0$, τ.ω. $|a_n| < M_1$, $|b_n| < M_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Θέτω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$|a_n b_n - \ell m| = |a_n b_n - a_n m + a_n m - \ell m| =$

$= |a_n \cdot (b_n - m) + (a_n - \ell) \cdot m| \leq |a_n| \cdot |b_n - m| + |m| \cdot |a_n - \ell| \leq$

$\leq M_1 \cdot |b_n - m| + |m| \cdot |a_n - \ell| < M_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2M_1} + |m| \cdot \frac{\varepsilon}{2|m|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \boxed{|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|}$ → αντίστροφη τριγωνική ανισότητα

Από τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε:

$|x-y| + |y| \geq |x| \Rightarrow |x-y| \geq |x| - |y| \Rightarrow |y-x| + |x| \geq |y| \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-y| \geq |y| - |x| = -(|x| - |y|)$

$\Rightarrow |x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$

$\big||a_n| - |\ell|\big| \leq |a_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| \to |\ell|$

(5)

(iii) $b_n \to m \xrightarrow{(iv)} |b_n| \to |m| > 0$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\big||b_n| - |m|\big| < \varepsilon$

$|m| - \varepsilon < |b_n| < |m| + \varepsilon$

Για $\boxed{\varepsilon = \frac{|m|}{2}} \Longrightarrow |b_n| > \frac{|m|}{2}$, $\forall n \geq n_0$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l}{m}\right| = \left|\frac{m \cdot a_n - l \cdot b_n}{b_n \cdot m}\right| = \frac{|m a_n - l \cdot b_n|}{|b_n| \cdot |m|} < \frac{|m \cdot a_n - l b_n|}{\frac{|m|^2}{2}}, \forall n \geq n_0$$

And (i) $\xRightarrow{\kappa = m, \lambda = -l} \lim(m \cdot a_n - l \cdot b_n) = m \cdot l - l \cdot m = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0' \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0'$, $|m \cdot a_n - l b_n - 0| < \frac{m^2 \cdot \varepsilon}{2}$

Θέτω $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$

$$\forall n \geq n_0'', \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{l}{m}\right| < \frac{|m a_n - l \cdot b_n|}{\frac{|m|^2}{2}} < \frac{m^2}{2} \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{\frac{|m|^2}{2}}\right) = \varepsilon$$

(v) • Έστω ότι $\boxed{l>0}$.

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon \cdot \sqrt{l}$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{l}| = \left|\frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{l})(\sqrt{a_n} + \sqrt{l})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}}\right| = \left|\frac{a_n - l}{\sqrt{a_n} + \sqrt{l}}\right| \leq \frac{|a_n - l|}{\sqrt{l}} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

• Έστω ότι $\boxed{l=0} \Rightarrow a_n \to 0$.

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n| < \varepsilon \Rightarrow a_n < \varepsilon^2$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\sqrt{a_n} < \varepsilon \Rightarrow |\sqrt{a_n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{a_n} \to 0$

π.χ. $\lim \frac{7n^3-6n^2+5n+4}{5n^3+2n^2+n}$

$$\frac{7n^3-6n^2+5n+4}{5n^3+2n^2+n} = \frac{\cancel{n^3}\left(7-\frac{6}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{4}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(5+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{7}{5}$$

$\frac{6}{n}\to 0$, $\frac{5}{n^2}\to 0$, $\frac{4}{n^3}\to 0$, $\frac{2}{n}\to 0$, $\frac{1}{n^2}\to 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΙΣΟΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ)

Έστω $a_n \le b_n \le \gamma_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Αν $a_n, \gamma_n \to \ell \in \mathbb{R}$, τότε $b_n \to \ell$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\varepsilon>0$. $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \ge n_1$, $|a_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \ge n_2$, $|\gamma_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow \ell-\varepsilon < \gamma_n < \ell+\varepsilon$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$\ell-\varepsilon < a_n \le b_n \le \gamma_n < \ell+\varepsilon, \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow \forall n \ge n_0, |b_n - \ell| < \varepsilon$

ΑΣΚΗΣΗ

$\lim \frac{2n}{n^2+1}$

$0 \le \frac{2n}{n^2+1} \le \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \to 0$

$a_n = 0, b_n = \frac{2n}{n^2+1}, \gamma_n = \frac{2}{n}$

$\Rightarrow a_n \leq b_n \leq \gamma_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$\left.\begin{matrix} a_n \to 0 \\ \gamma_n \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b_n \to 0$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>
Έστω ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, να ισχύει
$a_n \leq b_n \leq \gamma_n$
Αν $a_n, \gamma_n \to l \in \mathbb{R}$, τότε $b_n \to l$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> (ΘΕΩΡΗΜΑ)

Θέτω $a_n' = \begin{cases} 0, \text{ αν } n \leq n_0 - 1 \\ a_n, \text{ αν } n \geq n_0 \end{cases}$

$b_n' = \begin{cases} 0, \text{ αν } n \leq n_0 - 1 \\ b_n, \text{ αν } n \geq n_0 \end{cases}$

$\gamma_n' = \begin{cases} 0, \text{ αν } n \leq n_0 - 1 \\ \gamma_n, \text{ αν } n \geq n_0 - 1 \end{cases}$

$\lim a_n' = \lim a_n = l$
$\lim \gamma_n' = \lim \gamma_n = l$
όμως $a_n' \leq b_n' \leq \gamma_n', \forall n \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow \lim b_n' = l = \lim b_n$

<u>ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BERNOULLI</u>

$(1+a)^n \geq 1 + na, \forall a > -1, \forall n \in \mathbb{N}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> (Με επαγωγή στο n).

Για $n=1$ ισχύει.
Έστω ότι ισχύει για $n=k$. Αρκεί ν.δ.ο. ισχύει για $n=k+1$
$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k \cdot (1+a) \underset{\text{επαγωγής}}{\overset{\text{υπόθεση}}{\geq}} (1+ka)(1+a) = 1 + a + ka + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$

Άρα ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

38

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① Έστω $a \in \mathbb{R}$, $|a|<1$. Τότε, $\lim a^n = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow \exists \theta > 0$, τ.ω. $\frac{1}{|a|} = 1+\theta \Rightarrow \frac{1}{|a|^n} = (1+\theta)^n \geq 1+n\theta$

$\Rightarrow |a^n| \leq \frac{1}{1+n\theta} \Rightarrow \frac{-1}{1+n\theta} \leq a^n \leq \frac{1}{1+n\theta}$

Όμως $\frac{1}{1+n\theta}, -\frac{1}{1+n\theta} \to 0$

$\xrightarrow[\text{ακολουθίες}]{\text{Ισοσυγκλίνουσες}} a^n \to 0$

② $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Για n [illegible] $\Rightarrow \sqrt[2n]{n} > 1$

Για $n>1$, $\exists \omega_n > 0$. τ.ω. $\sqrt[2n]{n} = 1+\omega_n$

$\Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt[2n]{n}\right)^n}_{=\sqrt{n}} = (1+\omega_n)^n \geq 1+n\cdot\omega_n$

$\Rightarrow 0<\omega_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \to 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής $\Rightarrow \omega_n \to 0$

$\Rightarrow \sqrt[2n]{n} = 1+\omega_n \to 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n} = \sqrt[2n]{n}\cdot\sqrt[2n]{n} \to 1$

3) Έστω $a>0$. Τότε $\sqrt[n]{a} \to 1$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Από Αρχιμήδεια Ιδιότητα $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $n_0 > a$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}$

<u>ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ</u>

1) $\boxed{a \geq 1}$: $\underbrace{1}_{\to 1} \leq \sqrt[n]{a} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}, \forall n \geq n_0$

Άρα $\lim \sqrt[n]{a} = 1$

2) $\boxed{0<a<1}$

$\frac{1}{a} > 1 \xRightarrow{\text{ΠΕΡ. 1}} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$

Όμως, $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\{k_n\}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Τότε, $k_n \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(Επαγωγή)

$k_1 \geq 1$ (αφού $k_1 \in \mathbb{N}$)

$k_2 > k_1 \Rightarrow k_2 \geq k_1 + 1 \geq 2$

$k_3 > k_2 \Rightarrow k_3 \geq k_2 + 1 \geq 3$

ΘΕΩΡΗΜΑ

- Έστω $\{a_n\}$ μία ακολουθία και $\{a_{k_n}\}$ μία υπακολουθία αυτής. Αν $a_n \to l \in \mathbb{R}$, τότε $a_{k_n} \to l \in \mathbb{R}$

(Το αντίστροφο δεν ισχύει)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon$

Αν $n \geq n_0 \Rightarrow k_n \geq n_0$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $|a_{k_n} - l| < \varepsilon$ δηλ. $a_{k_n} \to l$

- Το αντίστροφο δεν ισχύει.

π.χ. $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει

όμως $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει (στο 1).

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $a_n \to l \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{N}$ (σταθερός)

θέτουμε $b_n = a_{n+k} \Rightarrow b_n \to l$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η $\{a_{n+k}\}$: υπακολουθία της $\{a_n\} \Rightarrow a_{n+k} \to l$

<u>π.χ.</u> $k=10$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$

$\{a_n\}$, $k_n = n$

(1) $\{a_n\}$ υπακολουθία του εαυτού της

(2) Αν $\{a_{k_n}\}$ συγκλίνει στο $l \in \mathbb{R}$ $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}$ συγκλίνει.

Αν όμως γνωρίζαμε ότι $\{a_n\}$ συγκλίνει τότε $\lim a_n = l$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

(i) $a_n = l, \forall n \in \mathbb{N}$

Θ.δ.ο. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$

- Έστω $\varepsilon>0$.

Αναζητούμε $n_0\in\mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n\geq n_0,\ |a_n - l|<\varepsilon$

$|a_n-l| = |l-l| = 0<\varepsilon,\ \forall n\geq 1\ (n_0=1)$

(ii) $a_n=\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}$

$l=0$

Θ.δ.ο. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητώ $n_0\in\mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n\geq n_0,\ |a_n-0|<\varepsilon$

$|a_n-0| = \left|\frac{1}{n}-0\right| = \frac{1}{n}$

Αν $n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{|a_n-0|}}{\frac{1}{n}} < \varepsilon$

Για $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, $\forall n\geq n_0,\ n>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |a_n-0|<\varepsilon$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(iv) Αν $m \neq 0 \Rightarrow \exists$ (δεξιά ή αριστερή) (διαστηματική) περιοχή B του ξ, τ.ω. $g(x) \neq 0$, $\forall x \in B$.

Έστω ακολουθία $\{x_n\}$ από το $A \setminus \{\xi\}$ (αντ. $x_n < \xi, \forall n$ ή $x_n > \xi, \forall n$)

τ.ω. $x_n \to \xi$

Τότε $f(x_n) \to \ell$, $g(x_n) \to m \Rightarrow \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{\ell}{m}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \xi^{(\pm)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ)

Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, σ.σ. του A (από δεξιά ή από αριστερά) και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in A$ $(f, g, h : A \to \mathbb{R})$ και $\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) = \lim_{x \to \xi^{(\pm)}} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = \ell$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία από το $A \setminus \{\xi\}$ (αντ. $x_n < \xi, \forall n$ ή $x_n > \xi, \forall n$) τ.ω. $x_n \to \xi$

$\Rightarrow f(x_n), h(x_n) \to \ell$

$\underbrace{f(x_n)}_{\ell} \leq g(x_n) \leq \underbrace{h(x_n)}_{\ell} \Rightarrow g(x_n) \to \ell \Rightarrow \lim_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = \ell$

· $|a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$.

Γενικά, $|a_n| \to |\ell| \not\Rightarrow a_n \to \ell$

<u>π.χ.</u> $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει

$|a_n| = 1 \Rightarrow |a_n|$ δεν συγκλίνει

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0 : \big||a_n| - 0\big| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

Οπότε $a_n \to 0$.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία με $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ και $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell \in [0,1)$

$\Rightarrow a_n \to 0$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \ell\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ell - \varepsilon < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \ell + \varepsilon$

Για $\boxed{\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{2\ell+1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2} < 1$

$$\forall n \geq n_0, \left|\frac{a_{n+1}}{a_{n_0}}\right| = \underbrace{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}_{< \frac{1+\ell}{2}} \cdot \underbrace{\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|}_{< \frac{\ell+1}{2}} \cdots \underbrace{\left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right|}_{< \frac{1+\ell}{2}} < \frac{1+\ell}{2} \cdot \frac{1+\ell}{2} \cdots \frac{1+\ell}{2} = \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0+1}$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0, |a_{n+1}| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0+1} \cdot |a_{n_0}|$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0, |a_{n+1}| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \cdot \underbrace{|a_{n_0}| \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{1-n_0}}_{=C}$

Αν $|x|<1 \Rightarrow x^n \to 0$

$$\underbrace{\left(\frac{1+l}{2}\right)^n}_{\to 0} < a_{n+1} < c \cdot \left(\frac{1+l}{2}\right)^n \to 0$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής $\Rightarrow a_{n+1} \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[a \cdot n]}{n} = a$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\frac{a\cdot n - 1}{n} \leq \frac{[a\cdot n]}{n} \leq \frac{a \cdot n}{n} \Rightarrow \underbrace{a - \frac{1}{n}}_{\to a} < \frac{[a\cdot n]}{n} \leq \underbrace{a}_{\to a}$$

Οπότε $\frac{[a\cdot n]}{n} \to a$ (από Κριτήριο Παρεμβολής)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $x \geq 0$. Τότε $\sqrt[n]{1+x^n} \to \begin{cases} 1, & x<1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

· Έστω $\boxed{x<1} \Rightarrow \sqrt[n]{1+x^n}$

$\hookrightarrow x^n < 1 \Rightarrow 1+x^n < 2 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{1+x^n}}_{\to 1} < \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1}$

Οπότε $\sqrt[n]{1+x^n} \to 1$

· Έστω $\boxed{x \geq 1}$: $\sqrt[n]{1+x^n} = \sqrt[n]{x^n\left(\frac{1}{x^n}+1\right)} = \sqrt[n]{x^n} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1} = x \cdot \sqrt[n]{1+\left(\frac{1}{x}\right)^n}$

(επειδή $\frac{1}{x} < 1$) $\to x \cdot 1 = x$

ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

· $\{a_n\}$ λέγεται (γνησίως) αύξουσα αν $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} > a_n)$

$\Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_1 < n_2$: $a_{n_1} \leq a_{n_2}$ $(a_{n_1} < a_2)$

· $\{a_n\}$ λέγεται (γνησίως) φθίνουσα αν $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} < a_n)$

$\Leftrightarrow \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_1 < n_2$: $a_{n_1} \geq a_{n_2}$ $(a_{n_1} > a_{n_2})$

π.χ.

1) $a_n = \dfrac{2n-7}{3n+2}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2} - \frac{2n-7}{3n+2} = \frac{(2n-5)(3n+2)-(3n+5)(2n-7)}{(\cdot\ \cdot\ \cdot)}$$

$$= \frac{6n^2-11n-10-(6n^2-11n-35)}{(\cdot\ \cdot\ \cdot)} = \frac{25}{(\cdot\ \cdot\ \cdot)} > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Επομένως $\{a_n\}$ γν. αύξουσα.

2) $b_n = \dfrac{1}{2^n}$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow b_{n+1} < b_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \{b_n\}$: γν. φθίνουσα

3) $\{a_n\}$ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}(2a_n + 3)$, $n \in \mathbb{N}$

αναδρομικός τύπος

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{5}{4}$, $a_3 = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{5}{4} + 3\right)$

Θ.δ.ο. $\{a_n\}$ γν. αύξουσα
(Με επαγωγή στο n)

Για $n=1$, ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n=\kappa$: $a_{\kappa+1}>a_\kappa$

Θ.δ.ο. ισχύει για $n=\kappa+1$ $(a_{\kappa+2}>a_{\kappa+1})$

$$a_{\kappa+2}=\frac{1}{4}\cdot(2a_{\kappa+1}+3)$$

$$a_{\kappa+2}-a_{\kappa+1}=\frac{1}{4}\cdot(2a_{\kappa+1}+3)-a_{\kappa+1}=-\frac{1}{2}\cdot a_{\kappa+1}+\frac{3}{4}$$

Αν δ.ο. $a_{\kappa+1}<\frac{3}{2} \Rightarrow a_{\kappa+2}-a_{\kappa+1} \Rightarrow$ Αρκεί ν.δ.ο. $a_{\kappa+1}<\frac{3}{2}$

• Με επαγωγή πάνω στο n θ.δ.ο. $a_n<\frac{3}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Για $n=1$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n=\kappa$ $\left(a_\kappa<\frac{3}{2}\right)$

Θ.δ.ο. ισχύει για $n=\kappa+1$ $\left(a_{\kappa+1}<\frac{3}{2}\right)$

$$a_{\kappa+1}=\frac{1}{4}\cdot(2a_\kappa+3)\ \underset{\text{επαγωγής}}{\overset{\text{Υποθ.}}{<}}\ \frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\frac{3}{2}+3\right)=\frac{3}{2}$$

ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

(i) Έστω $\{a_n\}$ αύξουσα $\Rightarrow a_1\leq a_2\leq a_3\leq\ldots\leq a_n\leq\ldots$

$\Rightarrow a_n\geq a_1, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \{a_n\}$ κάτω φραγμένη

$\Rightarrow$ ($\{a_n\}$ φραγμένη αν-ν $\{a_n\}$ άνω φραγμένη)

(ii) (Ομοίως) Έστω $\{a_n\}$ φθίνουσα

$\Rightarrow$ ($\{a_n\}$ φραγμένη αν-ν $\{a_n\}$ κάτω φραγμένη)

{$\{a_n\}$ μονότονη αν $\{a_n\}$ αύξουσα ή φθίνουσα}

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\{a_n\}$ μονότονη και φραγμένη.

(i) Αν $\{a_n\}$ αύξουσα $\Rightarrow a_n \to \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

(ii) Αν $\{a_n\}$ φθίνουσα $\Rightarrow a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $\{a_n\}$ μονότονη, τότε $\{a_n\}$ συγκλίνει αν-ν $\{a_n\}$ φραγμένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΘΕΩΡΗΜΑ)

(i) Θέτουμε $A = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists x \in \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ τ.ω. $x > A - \varepsilon \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $a_{n_0} > A - \varepsilon$

Όμως $\forall n \geq n_0$, $a_n \geq a_{n_0} > A - \varepsilon$

επίσης $a_n \leq A$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $A - \varepsilon < a_n \leq A < a + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $|a_n - A| \leq \varepsilon \Rightarrow a_n \to A$

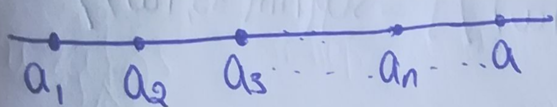
6-11-19

· $a\in\mathbb{R}$ σ.σ. του $A\subseteq\mathbb{R}$, αν:

(i) $\forall\delta>0, \exists x\in A$ τ.ω. $x\in N^*_\delta(a)=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$

ή (ii) $\forall\delta>0, A\cap N^*_\delta(a)\neq\emptyset$

π.χ. $\{a_n\}$, γν. αύξουσα, $a_n\to a \Rightarrow a$ σ.σ. του $\{a_n: n\in\mathbb{N}\}$

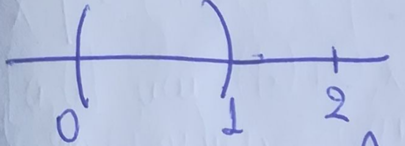


(iii) $\forall\delta>0, \exists x\in A\setminus\{a\}$, τ.ω. $|x-a|<\delta$

(iv) Το a είναι σ.σ. του A, αν οσοδήποτε κοντά στο a, μπορώ να βρω στοιχεία του A, που είναι διαφορετικά του a.

Τα (i),(ii),(iii),(iv) είναι ισοδύναμα.

π.χ.



$A=(0,1)\cup\{2\}$

Το 2 όχι σ.σ. του A

ΟΡΙΣΜΟΣ: Οποιοδήποτε στοιχείο του A δεν είναι σ.σ. του A ονομάζεται απομονωμένο.

ΛΗΜΜΑ

Αν $A\neq\emptyset\subseteq\mathbb{R}$, άνω φραγμένο, $\sup A\notin A$ (π.χ. $A=[0,1)$) και $x_0\in A$

Τότε, $\sup(A\cap(x_0,+\infty))=\sup A$ και $\sup A\notin A\cap(x_0,+\infty)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\sup(X\cup Y)=\max\{\sup X,\sup Y\}$ (*)

$A=A\cap\mathbb{R}=A\cap((-\infty,x_0]\cup(x_0,+\infty))=\underbrace{(A\cap(-\infty,x_0])}_{X}\cup\underbrace{(A\cap(x_0,+\infty))}_{Y}$

$\sup(A\cap(-\infty,x_0]) \leq x_0$

$\sup(A\cap(x_0,+\infty)) \geq x_0$

$A\cap(x_0,+\infty)\neq\emptyset$, γιατί αν $A\cap(x_0,+\infty)=\emptyset \Rightarrow A\subseteq(-\infty,x_0] \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0$: άνω φράγμα του $x_0 \Rightarrow x_0=\max A \Rightarrow x_0=\sup A \Rightarrow \sup A\in A$, άτοπο

$\Rightarrow \sup A\cap(-\infty,x_0]) \leq \sup(A\cap(x_0,+\infty))$

$\Rightarrow \sup A=\max\{\sup(A\cap(-\infty,x_0]),\ \sup(A\cap(x_0,+\infty))\} = \sup(A\cap(x_0,+\infty))$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Έστω $A\neq\emptyset\subseteq\mathbb{R}$, άνω φραγμένο (κάτω φραγμένο), τ.ω. $\sup A\notin A$ ($\inf A\notin A$)

Τότε, $\exists\{x_n\}$ από το A, $\{x_n\}$ αύξουσα (φθίνουσα), τ.ω. $x_n\to\sup A$

γνησίως

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> (Για το $\sup A$)

Θέτουμε $M=\sup A\in\mathbb{R}$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists x\in A$, τ.ω. $M\geq x>M-\varepsilon$.

Για $\boxed{\varepsilon=1}$, $\exists x_1\in A$ τ.ω. $M\geq x_1>M-\frac{1}{1}$

Για $\boxed{\varepsilon=\frac{1}{2}}$, $\exists x_2\in A\cap(x_1,\infty)$ τ.ω. $M\geq x_2>M-\frac{1}{2}$ (ΛΗΜΜΑ)

Για $\boxed{\varepsilon=\frac{1}{3}}$, $\exists x_3\in \underbrace{A\cap(x_1,\infty)\cap(x_2,\infty)}_{A\cap(x_2,+\infty)}$ τ.ω. $M\geq x_3>M-\frac{1}{3}$ (ΛΗΜΜΑ)

⋮

Για $\boxed{\varepsilon=\frac{1}{n}}$, $\exists x_n \underbrace{(A\cap(x_{n-2},\infty))\cap(x_{n-1},\infty)}_{A\cap(x_{n-1},\infty)}$, τ.ω. $M\geq x_n>M-\frac{1}{n}$

Θέσαμε, λοιπόν, $\{x_n\}$, $x_n\in A$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n$ και $M\geq x_n>M-\frac{1}{n}$

$\Rightarrow x_n\to M$

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε $\exists$ γν. αύξουσα ακολουθία ρητών (ή άρρητων) $\{x_n\}$ και γν. φθίνουσα ακολουθία ρητών (ή άρρητων) $\{y_n\}$ τ.ω. $x_n, y_n \to x_0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θ.δ.ο $\exists$ γν. αύξουσα ακολουθία ρητών $\{x_n\}$ τ.ω. $x_n \to x_0$

Παίρνω $A = (-\infty, x_0) \cap \mathbb{Q}$

x_0: άνω φράγμα του A

Ισχυρισμός: $\sup A = x_0$

Έστω $\varepsilon > 0$. Στο διάστημα $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ $\exists$ ρητός $q \Rightarrow q \in A,\ q > x_0 - \varepsilon \Rightarrow x_0 = \sup A$

Επίσης, $\sup A \notin A$

ΘΕΩΡΗΜΑ $\Rightarrow \exists \{x_n\}$ γν. αύξουσα από το A (άρα ακολουθία ρητών) τ.ω. $x_n \to x_0 = \sup A$

ΘΕΩΡΗΜΑ

$\{a_n\}$ μονότονη και $\exists$ υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$ τ.ω. $a_{k_n} \to \ell \in \mathbb{R}$

Τότε $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω ότι $\{a_n\}$ αύξουσα.

$a_{k_n} \to \sup\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ γιατί $\{a_{k_n}\}$ αύξουσα

a_n αύξουσα $\Longrightarrow n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} < a_{n_2}$

$\{k_n\}$ γν. αύξουσα $\Rightarrow k_n < k_{n+1} \to a_{k_n} \leq a_{k_{n+1}},\ \forall n \in \mathbb{N}$

Κάθε υπακολουθία μονότονης ακολουθίας είναι επίσης μονότονη και μάλιστα με την ίδια μονοτονία

$\Rightarrow l = \sup\{a_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow a_{k_n} \leq l, \forall n \in \mathbb{N} \xRightarrow{n \leq k_n} a_n \leq a_{k_n} \leq l, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_1 \leq a_n \leq l, \forall n \in \mathbb{N}$

$\xRightarrow{\text{αύξουσα}} \{a_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \{a_n\}$ συγκλίνει

$\Rightarrow \lim a_n = \lim a_{k_n} = l$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $a_1 = 2, \ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), n \in \mathbb{N}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (με επαγωγή)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n = \frac{2 - a_n^2}{2a_n}$$

$$\cdot\, 2 - (a_{n+1})^2 = 2 - \left[\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)\right]^2 = 2 - \left[\frac{1}{4}\left(a^2 + 4 + \frac{4}{a_n^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 4 + \frac{4}{a_n^2} - 8\right) = -\frac{1}{4}\left(a_n^2 - 4 + \frac{4}{a_n^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \left(a_n - \frac{2}{a_n}\right)^2 \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow 2 - a_2^2, 2 - a_3^2, 2 - a_4^2, \ldots < 0$

$2 - a_1^2 \leq 0.$

$\Rightarrow 2 - a_n^2 \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a_n\}$ φθίνουσα

$0 < a_n \leq a_1 \Rightarrow \{a_n\}$ μονότονη και φραγμένη $\Rightarrow \{a_n\}$ συγκλίνει

Θέτω $x = \lim a_n$. Έστω $x \neq 0$

$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$

$\Rightarrow \lim a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim a_n + \frac{2}{\lim a_n}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{x^2+2}{2x} \Rightarrow x^2 - 2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}$ ($x = -\sqrt{2}$ απορρίπτεται)

Έστω ότι $\lim a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $a_n < \varepsilon, \forall n \geq n_0$

$\{a_n\}$ συγκλίνει $\Rightarrow \{a_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \exists M > 0$, τ.ω. $a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

Για $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{M} > 0}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) > \frac{1}{2}\left(a_n + \quad\right) > M, \forall n \geq n_0$, άτοπο

$a_n < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Longleftrightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} = M, \forall n \geq n_0$

2) Έστω ότι $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, n \in \mathbb{N}$

ν.δ.ο. $b_n \to \ell$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0, |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|b_n - \ell| = \left| \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} - \ell \right| = \left| \frac{(a_1-\ell) + (a_2-\ell) + \ldots + (a_n-\ell)}{n} \right| \underset{\text{ανισότητα}}{\overset{\text{τριγ.}}{\leq}}$

$\leq \frac{|a_1-\ell| + |a_2-\ell| + \ldots + |a_n-\ell|}{n} = \frac{|a_1-\ell| + \ldots + |a_{n_0-1}-\ell|}{n} + \frac{\overbrace{|a_{n_0}-\ell|}^{<\frac{\varepsilon}{2}} + \ldots + \overbrace{|a_n-\ell|}^{<\frac{\varepsilon}{2}}}{n}$

$< \frac{|a_1-\ell| + \ldots + |a_{n_0-1}-\ell|}{n} + \frac{(n-n_0+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2}}{n} \leq \frac{|a_1-\ell| + \ldots + |a_{n_0-1}-\ell|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$

Όμως, $\frac{|a_1-\ell|+\dots+|a_{n_0-1}-\ell|}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

$\Rightarrow \exists n_0' \geq n_0$, τ.ω. $\forall n \geq n_0'$, $\frac{|a_1-\ell|+\dots+|a_{n_0-1}-\ell|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0'$, $|b_n-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

ΚΙΒΩΤΙΣΜΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ (ΤΟΥ CANTOR)

Έστω $\Delta_n=[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$

με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\Delta_n \supseteq \Delta_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(ii) $b_n-a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Τότε, $\exists!\ \xi\in\mathbb{R}$ τ.ω. $\xi\in\Delta_n$, $\forall n\in\mathbb{N} \iff \bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ μονοσύνολο

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}]$

$\Rightarrow a_n\leq a_{n+1}$, $b_n\geq b_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \{a_n\}$ αύξουσα $\{b_n\}$ φθίνουσα

$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq[a_3,b_3]\supseteq\dots\supseteq[a_n,b_n]$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow a_1\leq a_n\leq b_1$, $a_1\leq b_n\leq b_1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \{a_n\},\{b_n\}$ μονότονες και φραγμένες

$\Rightarrow \exists \ell,m\in\mathbb{R}$ τ.ω. $a_n\to\ell$, $b_n\to m$

Όμως, $b_n-a_n\to 0 \Rightarrow \ell-m=0 \Rightarrow \ell=m$

Άρα, $\exists \ell\in\mathbb{R}$ τ.ω. $a_n,b_n\to\ell$

ΒΗΜΑ 1ο

Αν $\exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \Rightarrow x = l$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$x \in [a_n, b_n]\ , \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \underset{l\nearrow}{a_n} \leq x \leq \underset{\searrow l}{b_n}\ , \forall n \in \mathbb{N}$

$\xRightarrow{\text{Κρ. Παρεμβολής}} x = l$

ΒΗΜΑ 2ο

$l \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

$\xLeftrightarrow{\text{ΑΠΟΔΕΙΞΗ}} l \in [a_n, b_n]\ , \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_n \leq l \leq b_n\ , \forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ αύξουσα και συγκλίνουσα $\Rightarrow a_n \to \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow l = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow l \geq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (1)

$\{b_n\}$ φθίνουσα και συγκλίνουσα $\Rightarrow b_n \to \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow b_n \geq l, \forall n \in \mathbb{N}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow a_n \leq l \leq b_n\ , \forall n \in \mathbb{N}$

ΑΣΚΗΣΗ (Ύπαρξη της κ-οστής ρίζας)

Έστω $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Τότε, $\exists!\, a \in (0, +\infty)$ τ.ω. $x = a^k$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτουμε $A = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0$ και $y^k \leq x\}$

A άνω φραγμένο. Θέτω $a = \sup A \Rightarrow a + \frac{1}{n} > a \Rightarrow a + \frac{1}{n} \notin A, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \left(a + \frac{1}{n}\right)^k > x \geq a^k$

$\xRightarrow{\text{Κρ. Παρ.}} x = a^k$

Αν $a^k = b^k \Rightarrow a = b$

$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2} \cdot b + a^{k-3} \cdot b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$

11-11-19

ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 2

(4) (i) Αν $a \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $A \subseteq \mathbb{R}$, νδο $\exists \{a_n\}$ από το $A \setminus \{a\}$, τ.ω. $a_n \to a$

(ii) Αν A: άνω φραγμένο, $\exists \{a_n\}$ από το A, τ.ω. $a_n \to \sup A$

ΛΥΣΗ

(i) a σ.σ. του $A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \setminus \{a\}$, τ.ω. $|x-a| < \varepsilon$

Για $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{n}}$, $\exists x_n = x \in A \setminus \{a\}$ τ.ω. $|x_n - a| < \varepsilon$

Ορίσαμε μία ακολουθία $\{x_n\}$ από το $A \setminus \{a\}$ τ.ω.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - a| < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{-1}{n} + a}_{\to a} < x_n < \underbrace{\frac{1}{n} + a}_{\to a} \xrightarrow{\text{Κρ. Παρεμβολής}} x_n \to a$

(6) $\{a_n\}$ ακολουθία φυσικών, τ.ω. $\{a_n\}$ συγκλίνει.

Ν.δ.ο. $\{a_n\}$ τελικά σταθερή (από κάποιο n_0 και μετά είναι σταθερή)

$\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{N})$ τ.ω. $\forall n \geq n_0, a_n = k$

ΛΥΣΗ

Έστω $\ell = \lim a_n$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$

Για $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $|a_n - \ell| < \frac{1}{2}$

$\forall n \geq n_0$, $|a_n - a_{n_0}| = |(a_n - \ell) + (\ell - a_{n_0})| \leq |a_n - \ell| + |\ell - a_{n_0}| =$

$= |a_n - \ell| + |a_n - \ell| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\xrightarrow[|a_n - a_{n_0}| < 1]{a_{n_0}, a_n \in \mathbb{N}} a_n = a_{n_0}, \forall n \geq n_0$

$a_{n_0} = k$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$P(x)$ πολυώνυμο, τ.ω. $P(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$

ν.δ.ο. $\sqrt[n]{P(n)} \to 1$

ΛΥΣΗ

$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_k x^k \quad x\in\mathbb{R}, \quad a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$

$(a_k \neq 0)$

$$\frac{P(n)}{n^k} = \frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{n} + a_k \xrightarrow{n\to\infty} a_k$$

$\Rightarrow a_k \geq 0 \, (a_k \neq 0) \Rightarrow a_k > 0$

$$\sqrt[n]{\frac{P(n)}{n^k}} \to 1 \Rightarrow \sqrt[n]{P(n)} \to 1$$

$$\sqrt[n]{\frac{P(n)}{n^k}} = \frac{\sqrt[n]{P(n)}}{(\sqrt[n]{n})^k}$$

ΛΗΜΜΑ

Αν $b_n \to b \in (0, +\infty)$. Τότε $\sqrt[n]{b_n} \to 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0, |b_n - b| < \varepsilon$

Για $0 < \varepsilon$ = οποιδήποτε $< b$,

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0, \; b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{b-\varepsilon}}_{\to 1} < \sqrt[n]{b_n} < \underbrace{\sqrt[n]{b+\varepsilon}}_{\to 1} \Rightarrow \sqrt[n]{b_n} \to 1$$

11-11-19

ΑΣΚΗΣΗ 8

Αν $A \neq \emptyset$ άνω φραγμένο, τότε είτε $\sup A \in A$ είτε $\sup A \in A'$

ΛΥΣΗ

ΛΗΜΜΑ: Έστω $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. Τότε a σ.σ. του $A \Leftrightarrow \exists \{a_n\}$ από το $A \setminus \{a\}$, τ.ω. $a_n \to a$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\Rightarrow$ " Τη δείξαμε

$\Leftarrow$ " $\{a_n\} \in A \setminus \{a\}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \to a$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0, |a_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \setminus \{a\}$ $(x = a_{n_0})$ τ.ω. $|x - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow a \in A'$

• Έστω $\sup A \notin A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,$ τ.ω. $\sup A \geq x > \sup A - \varepsilon$

Για $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{n}}$, $\exists x_n \in A$, τ.ω. $\sup A \geq x_n > \sup A - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow x_n \to \sup A$

$\{x_n\}$ ακολουθία από το $A \setminus \{\sup A\} \xrightarrow{\text{ΛΗΜΜΑ}} \sup A \in A'$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Bolzano-Weierstrass)

Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη ακολουθία. Τότε $\exists$ υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$, η οποία να συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτω $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Έστω ότι $\sup A \notin A$.

$\exists \{b_n\}$ από το A, τ.ω. $\{b_n\}$ αύξουσα και $b_n \to a = \sup A$

Τότε, $\exists$ υπακολουθία $\{b_{k_n}\}$ της $\{b_n\}$ τ.ω. $\{b_{k_n}\}$ να είναι υπακολουθία της $\{a_n\}$

Έστω ότι $\sup A \in A \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a_{k_1} = \sup A$

Θεωρώ το σύνολο $A \setminus \{a_{k_1}\}$

Αν $\sup(A \setminus \{a_{k_1}\}) \notin A \setminus \{a_{k_1}\}$ τέλος.

Αλλιώς, $\exists a_{k_2} = \sup(A \setminus \{a_{k_1}\})$. $a_{k_1} > a_{k_2}$

Αν $\sup(A \setminus \{a_{k_2}\}) \in A \setminus (\{a_{k_1}, a_{k_2}\})$ τέλος.

Αλλιώς $\exists a_{k_3} \in A$, τ.ω. $a_{k_3} < a_{k_2} < a_{k_1}$

Αν $\sup(A \setminus \{a_{k_1}, \dots, a_{k_n}\}) \in A \setminus \{a_{k_1}, \dots, a_{k_n}\}) \ \forall n \in \mathbb{N}$

τότε $\exists k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a_{k_1} > a_{k_2} > a_{k_3} > \dots$

$\{a_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \{a_{k_n}\}$ συγκλίνει

$\{a_{k_n}\}$ φραγμένη

ΑΣΚ.5/ΦΥΛΛ.2

Αν $\{a_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, τ.ω. $a_n \to 0$

Ν.δ.ο το σύνολο τιμών $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

ΛΥΣΗ

- Αν $\boxed{a_n = 0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$
- Αν όχι, τότε $\exists n \in \mathbb{N}$ με $a_n > 0$

Θέλω $n^* \in \mathbb{N}$, τ.ω. $n^* = \min\{n : a_n > 0\}$

Για $\varepsilon = a_{n^*} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ $a_n < a_{n^*}$

<u>ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ</u>: $n_0 > n^*$

$\forall n \geq n_0$, $a_n < a_{n^*} \leq a_k$ $\quad \max\{a_1, \dots, a_{n_0-1}\} = a_k$, $1 \leq k \leq n_0 - 1$

$\forall\, 1 \leq n \leq n_0 - 1$, $a_n \leq a_k$

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_k$

13-11-19

ΑΣΚΗΣΗ

Κάθε ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία.

ΛΥΣΗ

Έστω $\{a_n\}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

① $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{a_n : n \geq n_0\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

$\boxed{n_0 = 1}$ $\exists k_1 \geq 1$ τ.ω. $a_{k_1} = \max\{a_n : n \geq 1\}$

$\boxed{n_0 = k_1 + 1}$ $\exists k_2 \geq k_1 + 1$ τ.ω. $a_{k_2} = \max\{a_n : n \geq k_1 + 1\}$

$\boxed{n_0 = k_2 + 1}$ $\exists k_3 \geq k_2 + 1$ τ.ω. $a_{k_3} = \max\{a_n : n \geq k_2 + 1\}$

$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n$ κ.ο.κ.

$a_{k_1} \geq a_{k_2} \geq \ldots \geq a_{k_n}$

$\{a_{k_n}\}$ φθίνουσα υπακολουθία της $\{a_n\}$

② $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{a_n : n \geq k_1\}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

$k_1 = n_0$

Ισχυρισμός: $\forall k > k_1$, το σύνολο $\{a_n : n \geq k\}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Ισχυρισμός)

Έστω ότι $a_l = \max\{a_n : n \geq k\}$ όπου $l \geq k$

$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_l, a_{l+1}$

θέτω $a_r = \max\{a_{k_1}, a_{k_1+1}, \dots, a_{l-1}\}$

$\max\{a_n : n \geq k_1\} = \max\{a_r, a_k\}$ άτοπο

$\boxed{k=k_1}$. Το $\{a_n : n \geq k_1\}$ δεν έχει μέγιστο $\Rightarrow \exists k_2 \geq k_1 \quad a_{k_2} > a_{k_1}$

$\boxed{k=k_2}$. Το $\{a_n : n \geq k_2\}$ δεν έχει μέγιστο $\Rightarrow \exists k_3 \geq k_2 \quad a_{k_3} > a_{k_2}$

⋮ (κ.ο.κ.)

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (Bolzano-Weierstrass)

κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $\{a_n\}$ φραγμένη. Από <u>ΑΣΚΗΣΗ</u> $\exists \{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$ τ.ω. η $\{a_{k_n}\}$ να είναι μονότονη.

$\{a_{k_n}\}$ φραγμένη $\Rightarrow$ $\{a_{k_n}\}$ συγκλίνει.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ Bolzano-Weierstrass</u>

Έστω $a \in \mathbb{R}$ σ.σ. του $A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists \{a_n\}$ από το $A \setminus \{a\}$ τ.ω. $a_n \to a$

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 1</u>

Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, A κλειστό $\Leftrightarrow \forall \{a_n\}$ από το A τ.ω. η $\{a_n\}$ συγκλίνει ισχύει ότι $\lim a_n \in A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

A κλειστό $\Leftrightarrow A \supseteq A'$

"$\Rightarrow$" Έστω A κλειστό $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ ακολουθία από το A και $\{a_n\}$ συγκλίνει. Έστω ότι $\lim a_n \notin A$. $\Rightarrow a_n \neq \lim a_n = a, \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow a$ σ.σ. του $A \Rightarrow a \in A$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $\forall$ συγκλίνουσα ακολουθία $\{a_n\}$ από το A, ισχύει $\lim a_n \in A$.

Έστω a σ.σ. του A

$\Rightarrow \exists \{a_n\}$ από το $A \setminus \{a\}$ τ.ω. $a_n \to a$

$\xRightarrow{\text{υποθ}}$ το $a \in A$, το A περιέχει κάθε σημείο συσσώρευσής του

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Έστω A κλειστό και φραγμένο.

Τότε $\forall \{a_n\}$ από το A, $\exists$ συγκλίνουσα υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ και $\lim a_{k_n} \in A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή οι όροι της $\{a_n\}$ περιέχονται σε ένα φραγμένο σύνολο, η $\{a_n\}$ φραγμένη.

Επειδή η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη $\xRightarrow{\text{από B-W}}$ η $\{a_n\}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$

Επειδή το A είναι κλειστό $\xRightarrow{\text{από ΠΟΡΙΣΜΑ 1}}$ $\lim a_{k_n} \in A$.

• Αν A όχι φραγμένο, τότε $\exists$ ακολουθίες από το A χωρίς καμία συγκλίνουσα υπακολουθία.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3

Κάθε άπειρο και φραγμένο σύνολο $\subseteq \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον 1 σ.σ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού A άπειρο, υπάρχουν άπειρα στοιχεία τ.ω. να είναι διαφορετικά ανά δύο.

Επειδή A φραγμένο προκύπτει ότι η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη

$\overset{B-W}{\Longrightarrow} \exists \{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$ τ.ω. $a_{k_n} \to a$ για κάποια $a \in \mathbb{R}$.

- Αν $\nexists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $b_{n_0} = a$, τότε a σ.σ. του A
- Αν $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $b_{n_0} = a$, (τότε όλοι οι όροι της $\{b_n\}$ είναι διαφορετικοί ανά 2) $\forall n \geq n_0+1$, $b_n \neq a$

Θέτω $\gamma_n = b_{n_0+n} \Rightarrow \{\gamma_n\}$ ακολουθία από το $A \setminus \{a\}$ και γ_n συγκλίνει στο $a \Rightarrow a$ σ.σ. του A

ΠΟΡΙΣΜΑ 4

Κάθε κλειστό φραγμένο και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

18-11-19

$a_n \to +\infty$: $\forall M>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad a_n > M$

$a_n \to -\infty$: $\forall M>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad a_n < -M$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Αν $a_n \to \pm\infty$, τότε $\forall \{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$, ισχύει: $a_{k_n} \to \pm\infty$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω ότι $a_n \to +\infty$: $\forall M>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad a_n > M$. Έστω $M>0$.

$k_n \geq n$ ($\{k_n\}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών)

$\Rightarrow \forall n \geq n_0, k_n \geq n \geq n_0 : a_{k_n} > M \Rightarrow a_{k_n} \to +\infty$.

(Όμοια για $-\infty$)

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>

Αν $a_n, b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_n}{b_n} \to l > 0$ τότε $a_n \to +\infty \Leftrightarrow b_n \to +\infty$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω ότι $a_n \to +\infty$. Έστω $M>0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0 \quad a_n > M(l+\varepsilon)$

$\frac{a_n}{b_n} \to l$. Τότε $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0' \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0' \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0', \; l - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0', \; b_n > \frac{a_n}{l+\varepsilon} \left(> \frac{M(l+\varepsilon)}{l+\varepsilon} \right)$

$\Rightarrow \forall n \geq \max\{n_0, n_0'\}, \; b_n > \frac{M(l+\varepsilon)}{l+\varepsilon} = M \Rightarrow b_n \to +\infty$

Ομοίως, αν $b_n \to +\infty \Rightarrow a_n \to +\infty$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $a_n \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε:

i) Αν $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$

ii) Αν $a_n \to -\infty \Rightarrow b_n \to -\infty$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω $M>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \ge n_0$, $a_n > M \xrightarrow{b_n \ge a_n} \forall n \ge n_0, b_n > M \Rightarrow b_n \to \infty$

ii) Ομοίως με το i)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\{a_n\}, \{b_n\}$ τ.ω. $a_n \to \pm\infty$. Τότε:

i) Αν $\{b_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow a_n \pm b_n \to \pm\infty$

(∗) πρέπει να είναι στο ίδιο

ii) Αν $a_n, b_n \to \pm\infty^{(*)} \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$

iii) Αν $b_n \to l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε $a_n b_n \to (\pm\infty)$

π.χ. $3 \cdot \infty = \infty$, $(-3)\infty = -\infty$, $(-1)(-\infty) = \infty$

iv) Αν $\{b_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \to 0$

v) Αν $b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n b_n \to (\pm\infty)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Έστω π.χ. ότι $a_n \to \infty$

$\exists N > 0 : |b_n| < N, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, b_n > -N$ και $b_n < N \ (-b_n > -N)$

Έστω $M>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \ge n_0$, $a_n > M+N$ $M' = M+N$

$\Rightarrow a_n \pm b_n > a_n - N > M + N - N = M, \forall n \ge n_0 \Rightarrow a_n \pm b_n \to \infty$

ii) Έστω π.χ. ότι $a_n, b_n \to \infty$

Έστω $M>0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n < -M$

$\exists n_0' \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0', b_n < -M$

$\Rightarrow \forall n \geq \max\{n_0, n_0'\}, a_n + b_n < -2M < -M$

$\Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$

iii) Έστω π.χ. ότι $a_n \to \infty$

Έστω $M>0$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0, a_n > M$

$b_n \to l$: Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists n_0' \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0'$: $|b_n - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$

Για $\varepsilon = \frac{|l|}{2} > 0 \Rightarrow \exists n_0' \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0'$, $l - \frac{|l|}{2} < b_n < l + \frac{|l|}{2}$

1η περίπτωση: $l > 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0', b_n > \frac{l}{2} \Rightarrow a_n b_n > \frac{M \cdot l}{2} \Rightarrow a_n \cdot b_n \to \infty$

2η περίπτωση: $l < 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0', b_n < \frac{l}{2} \Rightarrow \forall n \geq \max\{n_0, n_0'\}, a_n b_n < \frac{M \cdot l}{2}$

$\Rightarrow a_n b_n \to -\infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Αν $a > 1$ τότε $a^n \to \infty$

ΛΥΣΗ

$a = 1 + b$ (όπου $b > 0$)

$\Rightarrow a^n = (1+b)^n \geq 1 + nb \to \infty \Rightarrow a^n \to \infty$

2) Έστω $r > 0$ και $a_n = \sqrt[n]{100 + r^n}$

ΛΥΣΗ

κοινό παράγοντα τον r^n

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{100}{r^n} + 1} \cdot \sqrt[n]{r^n} = r \cdot \sqrt[n]{\frac{100}{r^n} + 1}$$

• Έστω $r>1 \Rightarrow 1+\frac{100}{r^n}\to 1$

$\Rightarrow$ Για $\boxed{\varepsilon=\frac{1}{2}}$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq n_0$, $1-\frac{1}{2}<1+\frac{100}{r^n}<1+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \forall n\geq n_0$, $\underbrace{r\cdot\sqrt[n]{1-\frac{1}{2}}}_{\downarrow\, r}<a_n<\underbrace{r\cdot\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}}}_{\downarrow\, r} \Rightarrow a_n\to r$

• Έστω $\boxed{0<r\leq 1}$: $100<100+r^n\leq 101 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{100}}_{\downarrow\, 1}\leq\sqrt[n]{100+r^n}\leq\underbrace{\sqrt[n]{101}}_{\downarrow\, 1}\Rightarrow a_n\to 1$

<u>Άρα</u>: $a_n\to\begin{cases} r, & r>1\\ 1, & r\leq 1\end{cases}$

(3) $\sqrt[n]{n!}\to\infty$

<u>ΛΥΣΗ</u>

• Έστω n άρτιος: $n=2k$ για κάποιο $k\in\mathbb{N}$

$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2k=(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k)(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(2k)\geq(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot(k+k)\geq$

$\geq k\cdot k\cdot\ldots\cdot k=k^k$

$\sqrt[n]{n!}\geq\sqrt[n]{k^k}=\sqrt[2k]{k^k}=\sqrt{k}=\sqrt{\frac{n}{2}}$

• Έστω n περιττός: $\exists k\in\mathbb{N}$ τ.ω. $n=2k-1$

$n!=(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-1))\cdot k(k+1)\cdot\ldots\cdot(2k-1)\geq k(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+k-1)\geq$

$\geq k\cdot k\cdot\ldots\cdot k=k^k$

$\sqrt[n]{n!}\geq\sqrt[n]{k^k}\geq\sqrt[2k-1]{k^k}=k^{\frac{k}{2k-1}}\geq k^{\frac{k}{2k}}=\sqrt{k}=\sqrt{\frac{n+1}{2}}\geq\sqrt{\frac{n}{2}}$

Άρα $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sqrt[n]{n!}\geq\sqrt{\frac{n}{2}}\to\infty\Rightarrow\sqrt[n]{n!}\to\infty$

(4) $\frac{n!}{n^n} \to 0$

ΛΥΣΗ

$$0 \le \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n \cdot n} \le \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \frac{n!}{n^n} \to 0$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ Η ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ CAUCHY

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\{a_n\}$ βασική ακολουθία ή ακολουθία Cauchy, αν

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall m, n \ge n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$

όλοι οι όροι μετά από ένα σημείο είναι ε κοντά μεταξύ τους

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \ge n_0, \forall m > n : |a_m - a_n| < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \ge n_0, \forall k \in \mathbb{N} : |a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$

- Αν $\{a_n\}$ συγκλίνει, τότε $\{a_n\}$ Cauchy.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \ge n_0 : |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall m, n \ge n_0$, $|a_m - a_n| = |(a_m - \ell) + (\ell - a_n)| \le |a_m - \ell| + |\ell - a_n| =$

$= |a_m - \ell| + |a_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\{a_n\}$ ακολουθία Cauchy, αν $\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0, \forall m \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a_m| < \varepsilon$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ CAUCHY)

$\{a_n\}$ συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}$ είναι Cauchy.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

"$\Longrightarrow$" (αποδείχτηκε)

"$\Longleftarrow$" Έστω ότι η $\{a_n\}$ είναι Cauchy.

1ο ΒΗΜΑ: $\{a_n\}$ φραγμένη

Για $\boxed{\varepsilon=1}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall m,n \geq n_0$, $|a_m - a_n| < 1$

Για $\boxed{m=n_0}$, $\forall n \geq n_0$, $|a_{n_0} - a_n| < 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0$, $a_{n_0} - 1 < a_n < a_{n_0} + 1$

θέτουμε $m_1 = \min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0 - 1}\}$

$M_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0 - 1}\}$

$\Rightarrow \min\{m_1, a_{n_0} - 1\} \leq a_n \leq \max\{M_1, a_{n_0} + 1\}$

$\Rightarrow \{a_n\}$ φραγμένη $\xrightarrow[\text{Weierstrass}]{\text{Bolzano}}$ $\exists$ υπακολουθία $\{a_{k_n}\}$ της $\{a_n\}$ τ.ω. $\{a_{k_n}\}$ συγκλίνει

θέτουμε $l = \lim a_{k_n}$

2ο ΒΗΜΑ: $a_n \to l$

Έστω $\varepsilon > 0$. $\{a_n\}$ Cauchy $\Rightarrow \exists n_0$, τ.ω. $\forall m,n \geq n_0$, $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|a_n - l| = |(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - l)| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - l|$ (3)

$a_{k_n}\to \ell \Rightarrow \exists n_0' : \forall n\ge n_0',\ |a_{k_n}-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$

(i) Θέτω $n_0''=\max\{n_0,n_0'\}$

(ii) • $\forall n\ge n_0'',\ |a_{k_n}-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ (1) (γιατί $k_n\ge n\ge n_0''$)

• $\forall n\ge n_0'',\ |a_{k_n}-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$ (2)

(3) $\xRightarrow[(2)]{(1)} \forall n\ge n_0'',\ |a_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \Rightarrow a_n\to \ell$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $a_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$

Ν.δ.ο. $a_n\to\infty$

ΛΥΣΗ

Θ.δ.ο. $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει

$$|a_{2n}-a_n|=\left|\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)\right|=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\ge\frac{1}{2n}+\dots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2n}\le\frac{1}{n+1},\quad \frac{1}{2n}\le\frac{1}{n+2},\quad \frac{1}{2n}\le\frac{1}{2n}$$

$\Rightarrow |a_{2n}-a_n|\ge\frac{1}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$

Έστω ότι $\{a_n\}$ συγκλίνει $\Rightarrow \{a_n\}$ είναι Cauchy

Για $\boxed{\varepsilon=\frac{1}{2}}$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall m,n\ge n_0,\ |a_m-a_n|<\frac{1}{2}$

Για $\boxed{m=2n_0}$, $\boxed{n=n_0}$, $|a_{2n_0}-a_{n_0}|<\frac{1}{2}$, άτοπο

Άρα $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία.

(i) Αν $\{a_n\}$ αύξουσα, τότε $a_n \to \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

(ii) Αν $\{a_n\}$ φθίνουσα, τότε $a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\{a_n\}$ φραγμένη, το δείξαμε.

Έστω ότι $\{a_n\}$ αύξουσα και μη φραγμένη.

Επειδή $\{a_n\}$ αύξουσα $\Rightarrow a_n \geq a_1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a_n\}$ κάτω φραγμένη.

$\Rightarrow \{a_n\}$ όχι άνω φραγμένη $\Rightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ όχι άνω φραγμένο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$

Άρα αρκεί ν.δ.ο. $a_n \to \infty$

$\{a_n\}$ όχι άνω φραγμένη $\Rightarrow$ Αν $M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $a_{n_0} > M$

$\underline{\{a_n\} \text{ αύξουσα}} \Rightarrow \forall n \geq n_0,\ a_n \geq a_{n_0} > M \Rightarrow a_n \to \infty$

Ομοίως και για το infimum.

Αν $\{a_n\}$ μονότονη και φραγμένη τότε $\{a_n\}$ συγκλίνει.

Αν $\{a_n\}$ αύξουσα και μη φραγμένη τότε $a_n \to +\infty$

Αν $\{a_n\}$ φθίνουσα και μη φραγμένη τότε $a_n \to -\infty$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ (ΠΑΡ. 1)

$a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} > 0 \Rightarrow \{a_n\}$ αύξουσα

ΘΕΩΡΗΜΑ, $\{a_n\}$ δεν συγκλίνει $\Rightarrow a_n \to +\infty$

2) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2}),\ n\geq 3$

ν.δ.ο. $\{a_n\}$ συγκλίνει

ΛΥΣΗ

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+a_{n-1})-a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_n)$$

έχει εναλλάσσον πρόσημο

$\Rightarrow \{a_n\}$ όχι μονότονη

Έστω δύο δείκτες $m>n$, $m=n+k$

$$|a_m-a_n|=|a_{n+k}-a_n|=\left|(a_{n+k}-a_{n+k-1})+(a_{n+k-1}-a_{n+k-2})+\ldots+(a_{n+1}-a_n)\right|\leq$$

$$\leq\left|(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+2}-a_{n+1})+\ldots+(a_{n+k}-a_{n+k-1})\right| \quad (*)$$

$$|a_{n+1}-a_n|=\left|\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_n)\right|=\frac{1}{2}\cdot|a_n-a_{n-1}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot|a_{n-1}-a_{n-2}|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot|a_{n-2}-a_{n-3}|=\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\cdot|a_2-a_1|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot|a_2-a_1|=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad (**)$$

$$\xRightarrow{(*),(**)} |a_m-a_n|=|a_{n+k}-a_n|\leq|a_{n+1}-a_n|+|a_{n+2}-a_{n+1}|+\ldots+|a_{n+k}-a_{n+k-1}|$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+k-2}}=$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2^{n-1}}2=\frac{1}{2^{n-2}}$$

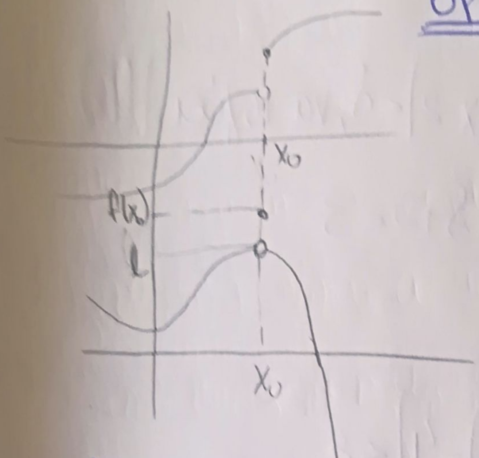
Δείξαμε ότι $\forall n\in\mathbb{N}$ και $\forall m\geq n$, $|a_m-a_n|\leq\frac{1}{2^{n-2}}$

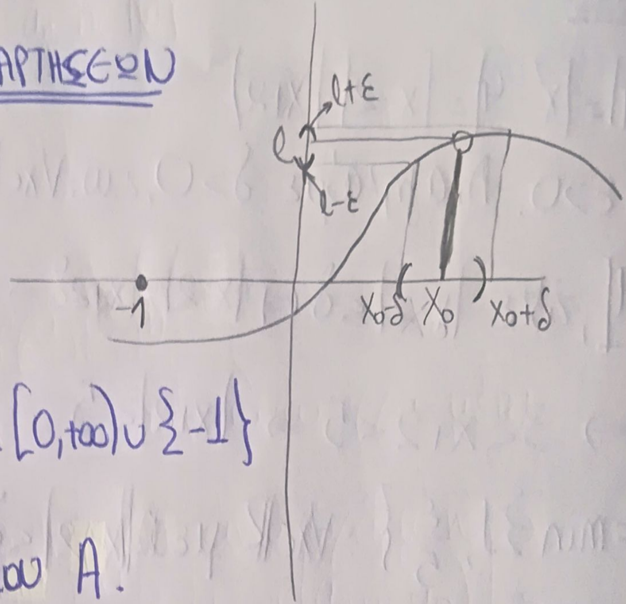
$\frac{1}{2^{n-2}}\to 0$. Έστω $\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n\geq n_0$, $\frac{1}{2^{n-2}}<\varepsilon$

$\forall m,n \geq n_0,\ m>n$, έχουμε $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2^{n-2}} \leq \frac{1}{2^{n_0-2}} < \varepsilon$

$\Rightarrow \{a_n\}$ Cauchy $\Rightarrow \{a_n\}$ συγκλίνει

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ





$f: [0,+\infty) \cup \{-1\}$

Έστω $f: A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και x_0 σ.σ. του A.

ΟΡΙΣΜΟΣ:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ αν $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x\in A$, με $0<|x-x_0|<\delta$

να ισχύει $|f(x)-l|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x \in A \cap N_\delta^*(x_0)$, $|f(x)-l|<\varepsilon$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $f(x)=c,\ \forall x\in(x_0-a, x_0+a),\ a>0,\ x_0\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Ισχυρισμός: $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$

Αποδ. ισχυρισμού

Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητάμε $\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in(x_0-a, x_0+a)$ με $0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-l|<\varepsilon$

Για $\delta=a$, $\forall x\in(x_0-a, x_0+a)$ με $0<|x-x_0|<a$, $|f(x)-c| = |c-c| < \varepsilon$

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ $x_0=2$

$\lim_{x\to 2} x^2=4$

Το δ πρέπει να εξαρτάται <u>μόνο</u> από το ε

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

$|f(x)-4|=|x^2-4|=|x-2|\cdot|x+2|$

Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητάμε $\delta>0$, τ.ω. $\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x-2|<\delta$, να ισχύει $|f(x)-4|<\varepsilon$

Αν $\boxed{\delta<1}$, τότε $|x-2|<\delta \Leftrightarrow -\delta<x-2<\delta \Rightarrow 1<x<\delta+2<3$

$\Rightarrow 3<x+2<5 \Rightarrow |x+2|<5$

Για $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{5}\}$: $\forall x\in\mathbb{R}$ με $0<|x-2|<\delta$: $|f(x)-4|<\varepsilon$

3) $\lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητάμε $\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in[-1,\infty)$ με $0<|x-3|<\delta$, $|\sqrt{x+1}-2|<\varepsilon$

Έχουμε: $|\sqrt{x+1}-2| = \left|\frac{x+1-4}{\sqrt{x+1}+2}\right| = \left|\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}\right| \leq \frac{|x-3|}{2}$

Για $\boxed{\delta=\varepsilon}$, $|x-3|<\delta=\varepsilon$ και $|\sqrt{x+1}-2|\leq\frac{|x-3|}{2}<\frac{\delta}{2}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\sqrt{x+1}=2$

Το μεγαλύτερο δ που μπορώ να πάρω είναι $\delta=2\varepsilon$ ($\delta\leq 2\varepsilon$)

25-11-19

x_0 σ.σ. του $A \subseteq \mathbb{R}$ ($\neq \emptyset$) από τα δεξιά (αντ. αριστερά) αν, $\forall \delta>0$, $(x_0, x_0+\delta)\cap A \neq \emptyset$ (αντ. $(x_0-\delta, x_0)\cap A\neq\emptyset$)

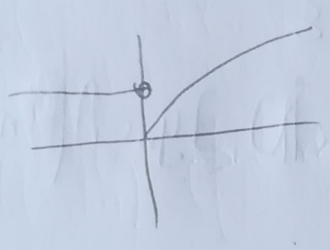
• Αν x_0 σ.σ. του A από τα δεξιά ή από τα αριστερά $\Rightarrow$ x_0 σ.σ. του A

ΘΕΩΡΗΜΑ

x_0 σ.σ. του A από τα δεξιά (αντ. αριστερά) $\Leftrightarrow$ $\exists \{x_n\}$ από το A, με $x_n > x_0$ (αντ. $x_n<x_0$), $\forall n\in\mathbb{N}$ τ.ω. $x_n\to x_0$

• Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $x_0\in\mathbb{R}$ σ.σ. του A από τα δεξιά (αντ. αριστερά) τότε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell\in\mathbb{R}$ (αντ. $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$), αν $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x\in A$ με $x\in(x_0,x_0+\delta)$ (αντ. $x\in(x_0-\delta,x_0)$) να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$$

ν.δ.ο. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

ΛΥΣΗ

$x_0=0$

Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητάμε $\delta>0$, τ.ω. $\forall x\in(0,\delta)$ να ισχύει $|\sqrt{x}-0|<\varepsilon$

Για $\boxed{\delta=\varepsilon^2}$, $\forall x\in(0,\varepsilon^2)$ ισχύει $\sqrt{x}<\varepsilon \Leftrightarrow \forall x\in(0,\varepsilon^2)$, $|f(x)-0|<\varepsilon$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ)

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, x_0 σ.σ του A

Τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ όταν $\forall \{x_n\}$ από το A, τ.ω. $x_n\to x_0$, να ισχύει $\lim f(x_n)=\ell$ (όπου $x_n\neq x_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ και έστω $x_n\to x_0$, $x_n\in A\setminus\{x_0\}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

• $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$. Έστω $\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta$ να ισχύει
$|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

• $x_n\to x_0$: Έστω $\varepsilon'>0$. Τότε $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq n_0$, $|x_n-x_0|<\varepsilon'$

Για $\underline{\varepsilon'=\delta}$. $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq n_0$, $0<|x-x_0|<\delta$

$\Rightarrow \forall n\geq n_0$, $|f(x_n)-\ell|<\varepsilon \Rightarrow f(x_n)\to\ell$

"$\Leftarrow$"

Έστω ότι $\forall\{x_n\}$ από το $A\setminus\{x_0\}$, τ.ω. $x_n\to x_0$, ισχύει $f(x_n)\to\ell$

Έστω ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq\ell \Rightarrow \exists\varepsilon>0$ τ.ω. $\forall\delta>0$, $\exists x_\delta\in A$ τ.ω.

$0<|x-x_0|<\delta$ και $|f(x_\delta)-\ell|\geq\varepsilon$

Έστω $\boxed{\delta=\frac{1}{n}}$, $n\in\mathbb{N}$ $\exists\varepsilon>0$, τ.ω. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists y_n\in A\,(y_n=x_{\frac{1}{n}})$ τ.ω.

$0<|y_n-x_0|<\frac{1}{n}$ και $|f(x_n)-\ell|\geq\varepsilon$

$\Rightarrow y_n\to x_0$ αλλά $f(y_n)\not\to\ell$ $\underline{\text{ΑΤΟΠΟ}}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$, x_0 σ.σ. του A από τα δεξιά (αντ. αριστερά). Τότε

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ $\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell\in\mathbb{R}\right) \Longleftrightarrow \forall\{x_n\}$ από το A, με $x_n>x_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(αντ. με $x_n<x_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$) να ισχύει $f(x_n)\to\ell$

$x_n<0, \forall n\geq n_0 \Rightarrow \forall n\geq n_0, f(x_n)=1-x_n\to 1$

③ Υπάρχουν άπειροι θετικοί και άπειροι αρνητικοί όροι της $\{x_n\}$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>: $\{f(x_n)\}$: φραγμένη, επειδή $\{x_n\}$ συγκλίνει $\Rightarrow \{x_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists m, M\in\mathbb{R}$, τ.ω. $m\leq x_n\leq M, \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad |f(x_n)|\leq \max\{1+x_n^2, |1-x_n|\}\leq 1+M^2+m^2+|M|+|m|+1$

$\Rightarrow \{f(x_n)\}$: φραγμένη

Έστω $\{f(x_{k_n})\}$ συγκλίνουσα υπακολουθία της $\{f(x_n)\}$

$\Rightarrow$ Είτε υπάρχει $\{f(x_{k_{\ell_n}})\}$ της $\{f(x_{k_n})\}$ τ.ω. $x_{k_{\ell_n}}>0, \forall n\in\mathbb{N}$

— " — — " — — " — τ.ω. $x_{k_{\ell_n}}<0, \forall n\in\mathbb{N}$

• Στην 1η περίπτωση: $f(x_{k_{\ell_n}})=x_{k_{\ell_n}}^2+1\to 1$

• Στην 2η περίπτωση: $f(x_{k_{\ell_n}})=1-x_{k_{\ell_n}}\to 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu\frac{1}{x}, \ x>0$.

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to x_0^+} \eta\mu\frac{1}{x}=l\in\mathbb{R}$

Έστω $x_n=\dfrac{1}{2\pi n}>0$, $y_n=\dfrac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}>0$ $\quad x_n, y_n\to 0$

$f(x_n)=\eta\mu 2\pi n=0\to 0$, $f(y_n)=\eta\mu\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=1\to 1$

Τότε ισχύει $\begin{array}{l} x_n-y_n\to 0 \\ f(x_n)-f(y_n)\to 1\end{array}$ <u>ΑΤΟΠΟ</u>

4) (Συνάρτηση Dirichlet) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x>0 \\ 2x-1, & x\le 0 \end{cases}$

ν.δ.ο. $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ΛΥΣΗ

Έστω $\{x_n\}, \{y_n\}$ τ.ω. $x_n>0$, $y_n<0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$x_n, y_n \to 0$

$\left.\begin{array}{l} f(x_n)=2x_n+1\to 1 \\ f(y_n)=2y_n-1\to -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$

2) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>0 \\ 1-x, & x\le 0 \end{cases}$

Ν.δ.ο. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

ΛΥΣΗ

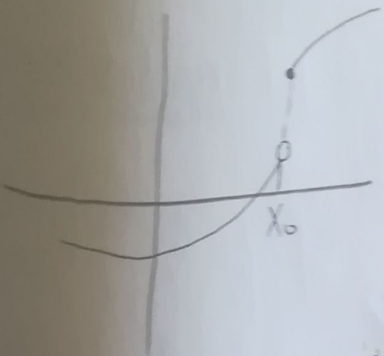
Έστω $\{x_n\}$ τ.ω. $x_n\to 0$ και $x_n\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

1) Δεν υπάρχουν άπειροι αρνητικοί όροι της $\{x_n\} \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω.
$\forall n\geq n_0$, $x_n>0 \Rightarrow \forall n\geq n_0$, $f(x_n)=x_n^2+1\to 1$

2) Δεν υπάρχουν άπειροι θετικοί όροι της $\{x_n\} \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω.

ΠΛΕΥΡΙΚΑ ΟΡΙΑ



$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in A$ με

$0<|x-x_0|<\delta$ και $x>x_0, |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\underbrace{x_0-\delta<x<x_0+\delta,\ x\neq x_0,\ x>x_0}_{x_0<x<x_0+\delta}$ $\left(\underbrace{x_0-\delta<x<x_0+\delta,\ x\neq x_0,\ x<x_0}_{x_0-\delta<x<x_0}\right)$

Έστω x_0 σ.σ. από τα δεξιά (αριστερά) του A.

$\lim\limits_{x\to x_0^{+(-)}} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ αν $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, τ.ω. $\forall x\in A$ με $x_0<x<x_0+\delta$ $(x_0-\delta<x<x_0)$

να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

$(x_0, x_0+\delta)$ ονομάζεται δεξιά περιοχή του x_0
$(x_0-\delta, x_0)$ -||- αριστερή -||- -||-

• Για να έχει νόημα το $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, πρέπει να υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της f αριστερά του x_0, οσοδήποτε κοντά στο x_0. Αντίστοιχα για το $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, να υπάρχουν σημεία δεξιά του x_0.

$\Longrightarrow \forall\delta>0, (x_0, x_0+\delta)\cap A\neq\emptyset$ (αντιστοίχως $(x_0-\delta, x_0)\cap A\neq\emptyset$)

Το x_0 λέγεται σημείο συσσώρευσης από τα δεξιά (αριστερά) του A.

Τότε λέμε ότι $+\infty$ σ.σ. του A (αντ. $-\infty$ σ.σ. του A)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $f(x)=\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x\in(0,\delta), f(x)>M$

ΛΥΣΗ

Έστω $M>0$. Αναζητάμε $\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in(0,\delta)$, $\overbrace{f(x)}^{\frac{1}{x}}>M \Leftrightarrow x<\frac{1}{M}$

Άρα για $\boxed{\delta=\frac{1}{M}>0}$, $\forall x\in(0,\frac{1}{M})$, $f(x)>M$.

2) Για $a>1$, ν.δ.ο. $\lim_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in(0,\delta)$, $\log_a x<-M$

ΛΥΣΗ

Έστω $M>0$. Αναζητάμε $\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in(0,\delta)$ $\log_a x<-M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<a^{-M}$. Για $\delta=a^{-M}>0$, $\forall x\in(0,\delta)$, $\log_a x<-M$

3) $\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

ΛΥΣΗ

Θ.δ.ο. $\forall M>0, \exists N>0$ τ.ω. $\forall x>N$, $e^x>M$

Έστω $M>0$. Αναζητάμε $N>0$ τ.ω. $\forall x>N$, $e^x>M \Leftrightarrow x>\ln M$

Για $N=\{1,\ln M\}$, $\forall x>N$, $e^x>M$

Τότε λέμε ότι $+\infty$ σ.σ. του A (αντ. $-\infty$ σ.σ. του A)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $f(x) = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x \in (0,\delta)$, $f(x) > M$

ΛΥΣΗ

Έστω $M>0$. Αναζητάμε $\delta>0$ τ.ω. $\forall x \in (0,\delta)$, $\overset{\frac{1}{x}}{f(x)} > M \Leftrightarrow x < \frac{1}{M}$

Άρα για $\boxed{\delta = \frac{1}{M} > 0}$, $\forall x \in (0, \frac{1}{M})$, $f(x) > M$.

2) Για $a>1$, ν.δ.ο. $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x \in (0,\delta)$, $\log_a x < -M$

ΛΥΣΗ

Έστω $M>0$. Αναζητάμε $\delta>0$ τ.ω. $\forall x \in (0,\delta)$ $\log_a x < -M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < a^{-M}$. Για $\delta = a^{-M} > 0$, $\forall x \in (0,\delta)$, $\log_a x < -M$

3) $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

ΛΥΣΗ

Ν.δ.ο. $\forall M>0, \exists N>0$ τ.ω. $\forall x > N$, $e^x > M$

Έστω $M>0$. Αναζητάμε $N>0$ τ.ω. $\forall x > N$, $e^x > M \Leftrightarrow x > \ln M$

Για $N = \{1, \ln M\}$, $\forall x > N$, $e^x > M$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ Θ.δ.ο. $\forall \varepsilon>0, \exists N>0$ τ.ω. $\forall x<-N$, $|e^x - 0|<\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $x<\ln\varepsilon$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $\varepsilon>0$. Για $N=\max\{1,|\ln\varepsilon|\}$, $\forall x<-N$, $\underbrace{e^x}_{|e^x-0|}<\varepsilon$

5) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$ <u>Θ.δ.ο.</u> $\forall M>0, \exists\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in(1-\delta,1)$ να ισχύει $\frac{1}{x-1}<-M \Leftrightarrow \frac{1}{1-x}>M \Leftrightarrow 1-x<\frac{1}{M} \Leftrightarrow x>1-\frac{1}{M}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $M>0$. Για $\delta=\frac{1}{M}$, $\forall x\in\left(1-\frac{1}{M},1\right)$,

$\frac{1}{x-1}<M$

6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x}=1$ <u>Θ.δ.ο.</u> $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$ τ.ω. $\forall x>N$, $|f(x)-1|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{x}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x}<\varepsilon \Leftrightarrow x>\frac{1}{\varepsilon}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Για $N=\frac{1}{\varepsilon}$, $\forall x>N$ $|f(x)-1|<\varepsilon$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ)

Έστω $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σ.σ. του $A\subseteq\mathbb{R}$. $f:A\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\xi^{(\pm)}} f(x)=l\in\overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \forall \{x_n\}$ από το $A\setminus\{\xi\}$ τ.ω. $x_n\to\xi$ ($x_n<\xi, \forall n\in\mathbb{N}$ ή $x_n>\xi, \forall n\in\mathbb{N}$). ισχύει $f(x_n)\to l$

27-11-19

$\lim\limits_{x \to x_0^{(\pm)}} f(x) = \ell$, αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in A$, $x \in N_\delta^*(x_0)$, να ισχύει

$(x \in (x_0, x_0+\delta)$ ή $x \in (x_0-\delta, x_0))$

$f(x) \in (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$

$\Updownarrow$

$|f(x)-\ell| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ Για κάθε περιοχή Γ του ℓ, $\exists$ διακεκομμένη (δεξιά ή αριστερή) περιοχή Β του x_0, τ.ω. $\forall x \in B \cap A$, $f(x) \in \Gamma$

- $\lim\limits_{x \to x_0^{(\pm)}} f(x) = \pm\infty$ — περιοχή του $+\infty$ $(a, +\infty)$, περιοχή του $-\infty$ $(-\infty, a)$ $\Big\}$ $a \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\xi \in \overline{\mathbb{R}} = \xi \in \mathbb{R} \cup (\pm\infty)$

$x \to \xi^{\pm}$ μόνο όταν $\xi \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, αν $\forall$ περιοχή Γ του ℓ, $\exists$ (διακεκομμένη) (δεξιά ή αριστερή) περιοχή Β του ξ τ.ω. $\forall x \in A \cap B$: $f(x) \in \Gamma$

- $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) = \pm\infty$ $(\xi \in \mathbb{R})$

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in A$ με $x \in \underbrace{N_\delta^*(\xi)}_{=B}$ $(x \in \underbrace{(\xi, \xi+\delta)}_{=B}$ ή $x \in \underbrace{(\xi-\delta, \xi)}_{=B})$, να ισχύει $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$

$\Updownarrow$

$f(x) \in \underbrace{(M, +\infty)}_{=\Gamma}$ $\qquad$ $f(x) \in \underbrace{(-\infty, -M)}_{=\Gamma}$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l\in\mathbb{R}$: $\forall \varepsilon>0, \exists N>0$ τ.ω. $\forall x>N, x\in A$ $\left(\forall x<-N,\ x\in A\right)$

$\Updownarrow$ $x\in(N,+\infty)=B$ $\qquad$ $\Updownarrow$ $x\in(-\infty,-N)=B$

$|f(x)-l|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$f(x)\in(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ $= \Gamma$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: $\forall M>0, \exists N>0$, τ.ω. $\forall x>N : f(x)>M$

$\Updownarrow$ $x\in(N,+\infty) = B$ $\qquad$ $\Updownarrow$ $f(x)\in(M,+\infty) = \Gamma$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$: $\forall M>0, \exists N>0$, τ.ω. $\forall x>N$, $f(x)<-M$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$: $\forall M>0, \exists N>0$, τ.ω. $\forall x<-N$, $f(x)>M$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$: $\forall M>0, \exists N>0$, τ.ω. $\forall x<-N$, $f(x)<-M$

$\lim\limits_{x\to\xi^{(\pm)}} f(x)$ $(\xi\in\mathbb{R})$ έχει νόημα <u>μόνο</u> αν ξ σ.σ. (αντ. από δεξιά ή αριστερά του A)

<u>π.χ.</u> $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ δεν ορίζεται

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ έχει νόημα μόνο όταν $\forall N>0$ $(N,+\infty)\cap A\neq\emptyset$ (αντ. $(-\infty,N)\cap A\neq\emptyset$)

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Θ.δ.ο. $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$ δεν υπάρχει

Έστω $x_n, y_n \to x_0$, με $x_n, y_n < x_0$ και $x_n \in \mathbb{Q}$, $y_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε, $f(x_n) = 0 \to 0$, $f(y_n) = 1 \to 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ δεν υπάρχει

(Αντίστοιχα και με το $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ δεν υπάρχει)

<u>ΑΣΚ. 1</u>/ΦΥΛ. 3

$\{k_n\}$ ακέραιων φυσικών, γν. αύξουσα.

Ν.δ.ο. $k_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>ΛΥΣΗ</u> (Με επαγωγή στο n)

Για $n = 1$ ισχύει.

Έστω ότι ισχύει για $n = \nu$, $k_\nu \geq \nu$

Θ.δ.ο. ισχύει για $n = \nu + 1$

$k_{\nu+1} > k_\nu \geq \nu$

$\Rightarrow k_{\nu+1} > \nu \Rightarrow k_{\nu+1} \geq \nu + 1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\{x_n\}$ τ.ω. $x_n\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}$ και $x_n\to 0, \forall n\in\mathbb{N}$ και $x_n\to 0$

Αρκεί ν.δ.ο. $x_n\left[\frac{1}{x_n}\right]\to 1$

$\frac{1}{x_n}-1\le\left[\frac{1}{x_n}\right]\le\frac{1}{x_n}\Rightarrow \underbrace{1-x_n}_{\to 1}\le x_n\left[\frac{1}{x_n}\right]\le \underbrace{1}_{\to 1}$

$\Rightarrow x_n\left[\frac{1}{x_n}\right]=1$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$. f φραγμένη αν $\exists m,M\in\mathbb{R}$ τ.ω. $m\le f(x)\le M, \forall x\in A$

$\Leftrightarrow \exists M>0$ τ.ω. $\forall x\in A, |f(x)|\le M$

- $\sup_{x\in A} f(x)=\sup\{f(x):x\in A\}$
- $\inf_{x\in A} f(x)=\inf\{f(x):x\in A\}$
- Αν $\lim a_n=l\in\mathbb{R}\Rightarrow\{a_n\}$ φραγμένη
- Αν $\lim_{x\to\xi} f(x)=l\in\mathbb{R}\not\Rightarrow f$ φραγμένη, π.χ. $f(x)=x, x\in\mathbb{R}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σ.σ. του A, $f:A\to\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\xi^{(\pm)}} f(x)=l\in\overline{\mathbb{R}}$

(i) Αν $l\in\mathbb{R}$, $\exists$ περιοχή (αριστερή ή δεξιά) στην οποία η f να είναι φραγμένη.

(ii) Αν $l>0$, $\exists$ περιοχή (αριστερή ή δεξιά) του ξ, στην οποία η f να είναι θετική.

δακτυλική

(iii) Αν $l<0$, $\exists$ περιοχή (αριστερή ή δεξιά) του ξ, στην οποία η f να είναι αρνητική.

δακτυλική

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Έστω $\xi \in \mathbb{R}$.

Για $\boxed{\varepsilon=1}$, $\exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x \in N_\delta^*(\xi)$, $|f(x)-l|<1 \Leftrightarrow l-1<f(x)<l+1$

(ii) Έστω $\xi, l \in \mathbb{R}$

$|f(x)-l|<\varepsilon$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x \in N_\delta^*(\xi)$, $l-\varepsilon<f(x)<l-\varepsilon$

Για $\boxed{\varepsilon=\frac{l}{2}}$: $\exists \delta>0$, τ.ω. $\forall x \in N_\delta^*(\xi)$, $f(x)>l-\frac{l}{2}=\frac{l}{2}>0$

ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 3

2) Αν $\{a_n\}$ μη φραγμένη, τότε $\exists \{a_{k_n}\}$ τ.ω. $a_{k_n} \to \pm\infty$

ΛΥΣΗ

Έστω ότι $\{a_n\}$ όχι άνω φραγμένη. Θ.δ.ο. $\exists k_1, k_2, k_3, \ldots \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$k_n<k_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $a_{k_n}>n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(Με επαγωγή πάνω στο n)

· Για $n=1$, $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $a_{k_1}>1$ αλλιώς η $\{a_n\}$ θα ήταν άνω φραγμένη

Έστω ότι έχουμε βρει $k_1<k_2<\ldots<k_n$ τ.ω. $a_{k_\nu}>\nu$, $\forall \nu \in \{1, \ldots, n\}$

Αρκεί να βρούμε $k_{n+1} \in \mathbb{N}$ τ.ω. $k_{n+1}>k_n$

Έστω ότι $\nexists$ τέτοιο $k_{n+1} \Rightarrow \forall m > k_n,\ a_m \leq n+1$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N},\ a_m \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_{k_n}, n+1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_n\}$ άνω φραγμένη <u>ΑΤΟΠΟ</u>

---

3) $\{a_n\}$ φραγμένη, $b_n \to \pm\infty$

ν.δ.ο. $\frac{a_n}{b_n} \to 0$. Ισχύει ότι $a_n \cdot b_n \to \pm\infty$;

<u>ΛΥΣΗ</u>

•(Το 2ο σκέλος)

<u>ΠΑΡΑΔ.</u>: $a_n = (-1)^n$, $b_n = n \to \infty$

↳ φραγμένη

$a_n \cdot b_n = (-1)^n \cdot n$ (το όριο δεν υπάρχει)

•(Το 1ο σκέλος)

$\exists M > 0$, τ.ω. $|a_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \to \pm\infty \Rightarrow |b_n| \to \infty$

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{M}{|b_n|} \to 0 \xrightarrow{\text{Κρ. Παρεμβολής}} \frac{a_n}{b_n} \to 0$$

---

6) $a_n = \begin{cases} \frac{n+3}{n^2+n+1}, & n \text{ περιττός} \\ \frac{n+1}{n}, & n \text{ πολλ/σιο του } 4 \\ \frac{1}{n} - 1, & n \text{ άρτιος και όχι πολλ/σιο του } 4 \end{cases}$

Σ.Σ. της $\{a_n\}$;

<u>ΛΥΣΗ</u>

$\{a_n\}$ φραγμέν

• $a_{2n-1} = \dfrac{2n-1+3}{(2n-1)^2+(2n-1)+1} \longrightarrow 0$

• $a_{4n} = \dfrac{4n+1}{4n} \to 1$

• $a_{4n+2} = \dfrac{1}{4n+2} - 1 \to -1$

$\Rightarrow 0, 1, -1$ σ.σ. της $\{a_n\}$

• Έστω ℓ σ.σ. της $\{a_n\}$

$\Rightarrow \exists \{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$ τ.ω. $a_{k_n} \to \ell$

Υπάρχουν άπειροι όροι της $\{a_{k_n}\}$ τ.ω. να ανήκουν όλοι ή στον 1ο ή στον 2ο ή 3ο κλάδο.

$\Rightarrow \exists \{a_{k_{\ell_n}}\}$ της $\{a_{k_n}\}$ τ.ω. να είναι υπακολουθία της $\{a_{2n-1}\}$ ή της $\{a_{4n}\}$ ή της $\{a_{4n+2}\}$

$\Rightarrow \ell = \lim a_{k_{\ell_n}} = 0$ ή 1 ή -1

---

7) Ν.δ.ο. $\dfrac{ημn}{n}$ συγκλίνει αλλά $ημ\left(\dfrac{\pi n}{3} + \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n}$ δεν συγκλίνει

ΛΥΣΗ

$\left|\dfrac{ημn}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} \Rightarrow -\dfrac{1}{n} \le \dfrac{ημn}{n} \le \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{ημn}{n} \to 0$

$-\dfrac{1}{n} \to 0$, $\dfrac{1}{n} \to 0$

$\eta\mu\left(\frac{\pi n}{3}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}=a_n$

$k_n=6n$

$l_n=6n+1$

- $a_{k_n}=\eta\mu\left(\frac{6n\cdot\pi}{3}+\frac{1}{6n}\right)+\frac{1}{6n}=\eta\mu\left(2\pi+\frac{1}{6n}\right)+\frac{1}{6n}=\eta\mu\left(\frac{1}{6n}\right)+\frac{1}{6n}\to 0$

- $a_{l_n}=\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot(6n+1)}{3}+\frac{1}{6n+1}\right)+\frac{1}{6n+1}=\eta\mu\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6n+1}\right)+\frac{1}{6n+1}=$

$=\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6n+1}\right)+\frac{1}{6n+1}\to\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$

Άρα η $\eta\mu\left(\frac{\pi n}{3}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

Γενικότερα, για ν.δ.ο. μία ακολουθία δεν συγκλίνει, βρίσκω 2 υπακολουθίες με διαφορετικά όρια

2-12-19

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σ.σ. του A (από τα δεξιά ή αριστερά). Τότε, αν $\exists \lim_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x)$, είναι μοναδικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία από το $A \setminus \{\xi\}$ (αντ. $x_n < \xi$ ή $x_n > \xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$) τ.ω. $x_n \to \xi$. Έστω $l = \lim_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x)$, $m = \lim_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_n) \to l$ και $f(x_n) \to m \Rightarrow l = m$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f, g: A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σ.σ. του A (από δεξιά ή από αριστερά).

Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε:

i) Αν δεν ισχύει $(l = +\infty, m = -\infty)$ ή $(l = -\infty, m = +\infty)$, τότε:

$$\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} [f(x) + g(x)] = l + m$$

ii) Αν δεν ισχύει $(l = \pm\infty, m = 0)$ ή $(l = 0, m = \pm\infty)$ τότε:

$$\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$$

iii) $\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} |f(x)| = |l|$

iv) Αν $(m \neq 0)$ ή δεν ισχύει ότι $(l = \pm\infty, m \pm\infty)$ τότε: $\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(iv) Αν $m \neq 0 \Rightarrow \exists$ (δεξιά ή αριστερή) (διαστημική) περιοχή B του ξ, τ.ω. $g(x) \neq 0$, $\forall x \in B$.

Έστω ακολουθία $\{x_n\}$ από το $A \setminus \{\xi\}$ (αντ. $x_n < \xi, \forall n$ ή $x_n > \xi, \forall n$) τ.ω. $x_n \to \xi$

Τότε $f(x_n) \to \ell$, $g(x_n) \to m \Rightarrow \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{\ell}{m}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \xi^{(\pm)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ)

Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, σ.σ. του A (από δεξιά ή από αριστερά) και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in A$ ($f, g, h : A \to \mathbb{R}$) και $\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) = \lim_{x \to \xi^{(\pm)}} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = \ell$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία από το $A \setminus \{\xi\}$ (αντ. $x_n < \xi, \forall n$ ή $x_n > \xi, \forall n$) τ.ω. $x_n \to \xi$

$\Rightarrow f(x_n), h(x_n) \to \ell$

$\underbrace{f(x_n)}_{\to \ell} \leq g(x_n) \leq \underbrace{h(x_n)}_{\to \ell} \Rightarrow g(x_n) \to \ell \Rightarrow \lim_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = \ell$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

• $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω $\{x_n\}$ τω $x_n\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}$ και [illegible]

Αρκεί ν.δ.ο. $x_n\left[\frac{1}{x_n}\right]\to 1$

$\frac{1}{x_n}-1\le\left[\frac{1}{x_n}\right]\le\frac{1}{x_n}\Rightarrow 1-x_n\le x_n\left[\frac{1}{x_n}\right]\le 1$

$\Rightarrow x_n\left[\frac{1}{x_n}\right]\to 1$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$. f φραγμένη αν $\exists m, M\in\mathbb{R}$ [illegible]

$\Leftrightarrow \exists M>0$ τω $\forall x\in A, |f(x)|\le M$

• $\sup\limits_{x\in A} f(x)=\sup\{f(x):x\in A\}$

• $\inf\limits_{x\in A} f(x)=\inf\{f(x):x\in A\}$

• Αν $\lim a_n=l\in\mathbb{R}\Rightarrow\{a_n\}$ φραγμένη

• Αν $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=l\in\mathbb{R}\not\Rightarrow f$ φραγμένη π.χ. $f(x)=x, x\in\mathbb{R}$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σ.σ. του A, $f:A\to\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=l\in\overline{\mathbb{R}}$

(i) Αν $l\in\mathbb{R}$, $\exists$ περιοχή (αριστερή ή δεξιά) [illegible]

(ii) Αν $\ell>0$, $\exists$ περιοχή (αριστερή ή δεξιά) του ξ, στην οποία η f να είναι θετική.

(iii) Αν $\ell<0$, $\exists$ περιοχή (αριστερή ή δεξιά) του ξ, στην οποία η f να είναι αρνητική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(i) Έστω $\xi\in\mathbb{R}$.

Για $\boxed{\varepsilon=1}$, $\exists\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in N_\delta^*(\xi)$, $|f(x)-\ell|<1 \Rightarrow \ell-1<f(x)<\ell+1$

(ii) Έστω $\xi,\ell\in\mathbb{R}$

$|f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in N_\delta^*(\xi)$, $\ell-\varepsilon<f(x)<\ell-\varepsilon$

Για $\boxed{\varepsilon=\frac{\ell}{2}}$: $\exists\delta>0$, τ.ω. $\forall x\in N_\delta^*(\xi)$, $f(x)>\ell-\frac{\ell}{2}=\frac{\ell}{2}>0$

ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 3

2) Αν $\{a_n\}$ μη φραγμένη, τότε $\exists\{a_{k_n}\}$ τ.ω. $a_{k_n}\to\pm\infty$

ΛΥΣΗ

Έστω ότι $\{a_n\}$ όχι άνω φραγμένη. Θ.δ.ο. $\exists k_1,k_2,k_3,\dots\in\mathbb{N}$ τ.ω.

$k_n<k_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και $a_{k_n}>n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(Με επαγωγή πάνω στο n)

Για $n=1$, $\exists k_1\in\mathbb{N}$ τ.ω. $a_{k_1}>1$ αλλιώς η $\{a_n\}$ θα ήταν άνω φραγμένη

Έστω ότι έχουμε βρει $k_1<k_2<\dots<k_n$ τ.ω. $a_{k_\nu}>\nu$, $\forall\nu\in\{1,\dots,n\}$

Αρκεί να βρούμε $k_{n+1}\in\mathbb{N}$ τ.ω. $k_{n+1}>k_n$

Έστω ότι $\nexists$ τέτοιο $k_{n+1} \Rightarrow \forall m > k_n,\ a_m \leq n+1$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N},\ a_m \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_{k_n}, n+1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_n\}$ άνω φραγμένη ATOΠO

3) $\{a_n\}$ φραγμένη, $b_n \to \pm\infty$

ν.δ.ο. $\frac{a_n}{b_n} \to 0$. Ισχύει ότι $a_n \cdot b_n \to \pm\infty$;

ΛΥΣΗ

•(Το 2º σκέλος)

ΠΑΡΑΔ.: $a_n = (-1)^n$, $b_n = n \to \infty$
↳ φραγμένη

$a_n \cdot b_n = (-1)^n \cdot n$ (το όριο δεν υπάρχει)

•(Το 1º σκέλος)

$\exists M > 0$, τ.ω. $|a_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \to \pm\infty \Rightarrow |b_n| \to \infty$

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{M}{|b_n|} \to 0 \xrightarrow{\text{Κρ. Παρεμβολής}} \frac{a_n}{b_n} \to 0$$

6) $a_n = \begin{cases} \frac{n+3}{n^2+n+1}, & n \text{ περιττός} \\ \frac{n+1}{n}, & n \text{ πολλ/σιο του } 4 \\ \frac{1}{n} - 1, & n \text{ άρτιος και όχι πολλ/σιο του } 4 \end{cases}$

Σ.Σ. της $\{a_n\}$;

ΛΥΣΗ

$\{a_n\}$ φραγμένη

• $a_{2n-1} = \dfrac{2n-1+3}{(2n-1)^2+(2n-1)+1} \longrightarrow 0$

• $a_{4n} = \dfrac{4n+1}{4n} \to 1$

• $a_{4n+2} = \dfrac{1}{4n+2} - 1 \to -1$

$\Rightarrow 0, 1, -1$ σ.σ. της $\{a_n\}$

• Έστω l σ.σ. της $\{a_n\}$
$\Rightarrow \exists \{a_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{a_n\}$ τ.ω. $a_{k_n} \to l$
Υπάρχουν άπειροι όροι της $\{a_{k_n}\}$ τ.ω. να ανήκουν όλοι ή στον 1ο ή στον 2ο ή 3ο υπόλοιπο.
$\Rightarrow \exists \{a_{k_{l_n}}\}$ της $\{a_{k_n}\}$ τ.ω. να είναι υπακολουθία της $\{a_{2n-1}\}$ ή της $\{a_{4n}\}$ ή της $\{a_{4n+2}\}$

$\Rightarrow l = \lim a_{k_{l_n}} = 0$ ή 1 ή -1

---

7) Ν.δ.ο. $\dfrac{\eta\mu n}{n}$ συγκλίνει αλλά $\eta\mu\left(\dfrac{\pi n}{3} + \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n}$ δεν συγκλίνει

ΛΥΣΗ

$\left|\dfrac{\eta\mu n}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} \Rightarrow -\dfrac{1}{n} \le \dfrac{\eta\mu n}{n} \le \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{\eta\mu n}{n} \to 0$

$-\dfrac{1}{n} \to 0$, $\dfrac{1}{n} \to 0$

$$\eta\mu\left(\frac{\pi n}{3}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}=a_n$$

$k_n = 6n$

$l_n = 6n+1$

• $$a_{k_n}=\eta\mu\left(\frac{6n\cdot\pi}{3}+\frac{1}{6n}\right)+\frac{1}{6n}=\eta\mu\left(2n\pi+\frac{1}{6n}\right)+\frac{1}{6n}=\eta\mu\left(\frac{1}{6n}\right)+\frac{1}{6n}\to 0$$

• $$a_{l_n}=\eta\mu\left(\frac{\pi\cdot(6n+1)}{3}+\frac{1}{6n+1}\right)+\frac{1}{6n+1}=\eta\mu\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6n+1}\right)+\frac{1}{6n+1}=$$

$$=\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{6n+1}\right)+\frac{1}{6n+1}\to\eta\mu\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$$

Άρα η $\eta\mu\left(\frac{\pi n}{3}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

Γενικότερα, για ν.δ.ο. μία ακολουθία δεν συγκλίνει, βρίσκω 2 υπακολουθίες με διαφορετικά όρια

2-12-19

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σ.σ. του A (από τα δεξιά ή αριστερά). Τότε, αν $\exists \lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x)$, είναι μοναδικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία από το $A \setminus \{\xi\}$ (αντ. $x_n < \xi$ ή $x_n > \xi$, $\forall n \in \mathbb{N}$)

τ.ω. $x_n \to \xi$. Έστω $l = \lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x)$, $m = \lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_n) \to l$ και $f(x_n) \to m \Rightarrow l = m$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f, g: A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$ σ.σ. του A (από δεξιά ή από αριστερά).

Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$. Τότε:

i) Αν δεν ισχύει $(l = +\infty, m = -\infty)$ ή $(l = -\infty, m = +\infty)$, τότε:

$$\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} [f(x) + g(x)] = l + m$$

ii) Αν δεν ισχύει $(l = \pm\infty, m = 0)$ ή $(l = 0, m = \pm\infty)$ τότε:

$$\lim_{x \to \xi^{(\pm)}} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$$

iii) $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} |f(x)| = |l|$

iv) Αν $(m \neq 0)$ ή δεν ισχύει ότι $(l = \pm\infty, m = \pm\infty)$ τότε: $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(iv) Αν $m \neq 0 \Rightarrow \exists$ (δεξιά ή αριστερή) (διακεκομμένη) περιοχή B του ξ, τ.ω. $g(x) \neq 0, \forall x \in B$.

Έστω ακολουθία $\{x_n\}$ από το $A \setminus \{\xi\}$ (αντ. $x_n < \xi, \forall n$ ή $x_n > \xi, \forall n$)

τ.ω. $x_n \to \xi$

Τότε $f(x_n) \to \ell$, $g(x_n) \to m \Rightarrow \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{\ell}{m}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \xi^{(\pm)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ)

Έστω $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$, σ.σ. του A (από δεξιά ή από αριστερά) και $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in A$ $(f, g, h : A \to \mathbb{R})$ και $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) = \lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = \ell$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία από το $A \setminus \{\xi\}$ (αντ. $x_n < \xi, \forall n$ ή $x_n > \xi, \forall n$) τ.ω. $x_n \to \xi$

$\Rightarrow f(x_n), h(x_n) \to \ell$

$f(x_n) \leq g(x_n) \leq \underbrace{h(x_n)}_{\to \ell} \Rightarrow g(x_n) \to \ell \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = \ell$

ℓ

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f, g, A } όπως στο προηγούμενο ΘΕΩΡΗΜΑ. Αν $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$. Τότε:

(i) Αν $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = +\infty$

(ii) Αν $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) = -\infty$

ΘΕΩΡΗΜΑ {Μηδενική x φραγμένη → 0}

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, f: φραγμένη σε μία (δεξιά ή αριστερή) (δακτυλιωτή) περιοχή B του $\xi \in \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\exists\, M > 0$, τ.ω. $\forall x \in B$: $|f(x)| \leq M \Rightarrow \underbrace{-M|g(x)|}_{\to 0} \leq f(x) \cdot g(x) \leq \underbrace{M \cdot |g(x)|}_{\to 0}$, $\forall x \in A$

Όμως, $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} g(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} |g(x)| = 0$

Κρ. Παρ. $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to \xi^{(\pm)}} f(x) \cdot g(x) = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$\lim\limits_{x \to 0} x \cdot ημ\frac{1}{x}$

ΛΥΣΗ

$\lim_{x\to 0} x = 0$ (μηδενική)

$\left|\eta\mu\frac{1}{x}\right| \leq 1, \forall x \neq 0$ (φραγμένη)

Οπότε $\lim_{x\to 0} x\cdot\eta\mu\frac{1}{x} = 0$

. ———————— .

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $g: A\to B$, $f: B\to \mathbb{R}$, $\xi\in\overline{\mathbb{R}}$ σ.σ. του A, $\eta\in\overline{\mathbb{R}}$ σ.σ. του B.

Αν $g(x)\neq\eta$ σε μία περιοχή του ξ, τότε αν $\lim_{x\to\xi} g(x)=\eta$, $\lim_{y\to\eta} f(y) = \ell\in\overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\xi} f(g(x)) = \ell$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία από το $A\setminus\{\xi\}$ τ.ω. $x_n\to\xi \Rightarrow g(x_n)\to\eta$

Υπόθεση $\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n\geq n_0, g(x_n)\neq\eta \Rightarrow$ Η ακολουθία $\{g(x_{n+n_0-1})\}$ είναι

ακολουθία από το $B\setminus\{\eta\}$ και $g(x_{n+n_0-1})\to\eta \Rightarrow f(g(x_{n+n_0-1}))\to\ell$

$\Rightarrow f(g(x_n))\to\ell$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1. $\xi\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to\xi} f(x) = \ell\in\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(\xi+h) = \ell$

ΛΥΣΗ

• Θέτω $g(h)=\xi+h \Rightarrow \lim_{h\to 0} g(h)=\xi$

Άρα, $\lim_{x\to\xi} f(x)=\ell \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(g(h))=\ell \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(\xi+h)=\ell$

Αντίστροφα, έστω $\lim_{h\to 0} f(\xi+h)=\ell$. Θέτω $g(x)=x-\xi$

$\Rightarrow f(g(x)+\xi)=f(x)$. Όμως $\lim_{x\to\xi}(g(x)+\xi)=\xi$

$\Rightarrow \lim_{x\to\xi} f(g(x)+\xi)=\lim_{x\to\xi} f(x)=\ell$

② $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\ell\in\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \lim_{y\to\infty} f\left(\frac{1}{y}\right)=\ell$

$g(y)=\frac{1}{y}$

ΑΣΚΗΣΗ 8/ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ii) Αν $|a_{n+1}-a_n|\leq c^n, \forall n\in\mathbb{N}$, όπου $0<c<1$

$\Rightarrow \{a_n\}$ συγκλίνει

ΑΣΚΗΣΗ 9/ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

$a_n=1+\frac{1}{2^p}+\dots+\frac{1}{n^p}$, $p>0$.

i) Αν $p \leq 1 \Rightarrow \{a_n\}$ αποκλίνει

ii) Αν $p > 1 \Rightarrow \{a_n\}$ συγκλίνει

ΛΥΣΗ

i) $a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p} \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \to +\infty$

ii) Έστω $p > 1$. Η $\{a_n\}$ είναι αύξουσα. Αρκεί ν.δ.ο. $\{a_n\}$ φραγμένη.

Έστω $\{a_{k_n}\}$ οποιαδήποτε υπακολουθία της $\{a_n\}$. Τότε,

$0 < a_n \leq a_{k_n} \Rightarrow$ Αν $\{a_{k_n}\}$ άνω φραγμένη, τότε $\{a_n\}$ άνω φραγμένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{a_n\}$ συγκλίνει.

$\Rightarrow$ Αρκεί να βρούμε άνω φραγμένη υπακολουθία της $\{a_n\}$

Παίρνω την $\{a_{2^n}\}$. Θέτω $b_n = a_{2^n}$

$$\underbrace{|a_{2^{n+1}} - a_{2^n}|}_{= |b_{n+1} - b_n|} = \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{(2^n)^p} + \frac{1}{(2^n+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1})^p}\right) -$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{(2^n)^p}\right) = \underbrace{\left(\frac{1}{(2^n+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^{n+1})^p}\right)}_{2^n\text{-όροι}} \leq \frac{1}{(2^n)^p} + \dots + \frac{1}{(2^n)^p} =$$

$$= \frac{2^n}{(2^n)^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n =$$

$$= c^n, \text{ όπου } c = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$0 < c < 1$$

$\Rightarrow |b_{n+1} - b_n| \leq c^n$, $0 < c < 1$ και $c = \frac{1}{2^{p-1}}$, $p > 1$ $\xrightarrow[\text{(ii)}]{\text{ΑΣΚΗΣΗ 8}} \{b_n\}$ συγκλίνει $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{b_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \{a_n\}$ συγκλίνει

ΑΣΚΗΣΗ 10/ ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

$A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο.

Τότε, A λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο

ΛΥΣΗ

- Έστω ότι $\sup A \in A$ ($\sup A \in \mathbb{R}$ αφού A φραγμένο) $\Rightarrow \sup A = \max A$
- Έστω ότι $\sup A \notin A$. $\exists \{a_n\}$ ακολουθία από το A, τ.ω. $a_n \to \sup A \overset{A \text{ κλειστό}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$

Όμοια και για το $\inf A$.

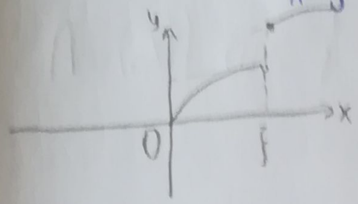
4-12-19

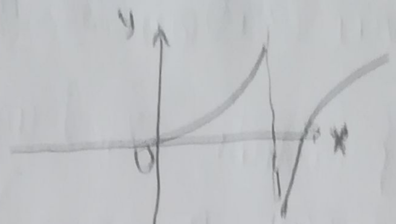
ΘΕΩΡΗΜΑ $\{[a,b], [a,+\infty], [-\infty,b], \mathbb{R}\}$

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$, I κλειστό διάστημα και $\xi \in I$ ή $\xi = \pm\infty$, αν $\pm\infty$ είναι σ.σ. του I. Τότε:

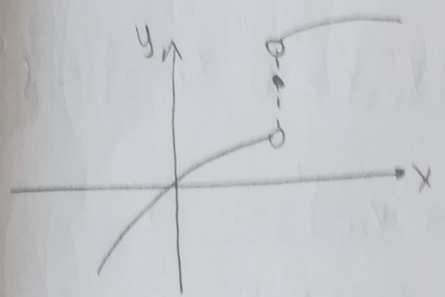
A

i) Αν f αύξουσα, τότε (α) $\lim\limits_{x \to \xi^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \text{ και } x < \xi\}$

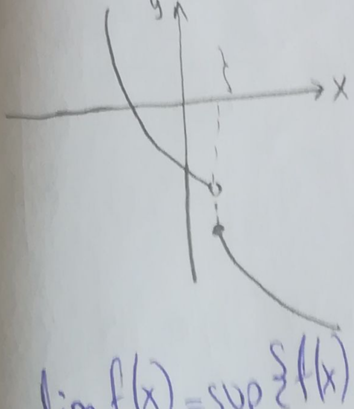




και (β) $\lim\limits_{x \to \xi^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \text{ και } x > \xi\}$ και αν ξ δεν είναι άκρο του I και $\xi \neq \pm\infty$: (γ) $\lim\limits_{x \to \xi^-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim\limits_{x \to \xi^+} f(x)$



ii) Αν f φθίνουσα, τότε $\lim\limits_{x \to \xi^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \text{ και } x < \xi\}$



και $\lim\limits_{x \to \xi^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \text{ και } x > \xi\}$ και αν ξ δεν είναι του I και $\xi \neq \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi^-} f(x) \geq f(\xi) \geq \lim\limits_{x \to \xi^+} f(x)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να δείξουμε τα (α) και

α) Αν f σταθερή σε μία αριστερή περιοχή του ξ

$\Rightarrow \exists \delta>0$ τ.ω. $\forall x \in (\xi-\delta, \xi)$: $f(x)=A \Rightarrow \lim_{x\to\xi^-} f(x) = A$

• Έστω ότι f δεν είναι σταθερή σε καμία αριστερή περιοχή του ξ.

$\underline{f \text{ αύξουσα}} \Rightarrow f(x)<A, \forall x<\xi$ (αλλιώς $\exists x_0 \in I$ και $x_0<\xi$ τ.ω. $f(x_0)=A$

$\Rightarrow \forall x \in (x_0, \xi)$: $\underset{A}{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}} \leq f(x) \leq A$ ~~άτοπο~~)

γ) $\exists \{x_n\}$ από το $I \cap (-\infty, \xi)$ τ.ω. $f(x_n) \to A$

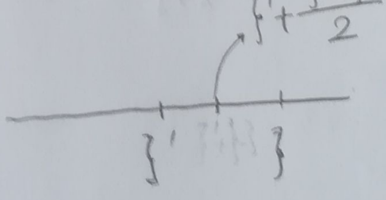
Θ.δ.ο. $x_n \to \xi$ (Έστω ότι $x_n \leq \infty$)

$x_n \leq \xi, \forall n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι $x_n \not\to \xi$. Τότε $\exists \{x_{k_n}\}$ τ.ω. $x_{k_n} \to \xi' < \xi$

Έστω $\varepsilon = \frac{\xi-\xi'}{2} > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $-\varepsilon < x_{k_n} - \xi' < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $x_{k_n} < \xi' + \frac{\xi-\xi'}{2} \Rightarrow f(x_{k_n}) \leq f\left(\xi' + \frac{\xi-\xi'}{2}\right)$

$\Rightarrow \lim f(x_{k_n}) = A \leq f\left(\xi' + \frac{\xi-\xi'}{2}\right)$



$\Rightarrow A = f\left(\xi' + \frac{\xi-\xi'}{2}\right)$ ~~ΑΤΟΠΟ~~

Άρα, $x_n \to \xi$

Θ.δ.ο. $\lim_{x\to\xi^-} f(x) = A$

Αρκεί ν.δ.ο. $\forall \{y_n\}$ από το $I \cap (-\infty, \xi)$ τ.ω. $y_n \to \xi$, $f(y_n) \to A$

$x_n \to \xi$. Αν $\varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$: $\xi - \varepsilon < x_n < \xi + \varepsilon$

$f(x_n)\to A$: Αν $\varepsilon>0$, $\exists n_0'\in\mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n\ge n_0'$, $A-\varepsilon < f(x_n) < A+\varepsilon$

$\Rightarrow f(x_{n_0'}) > A-\varepsilon$

$x_{n_0'} < \xi$

$\varepsilon = \xi - x_{n_0'} > 0$: $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\ge n_0''$

$x_{n_0'} = \xi-\varepsilon < y_n < \xi+\varepsilon$

$y_n\to\xi$: $\exists n_0'': \forall n\ge n_0$, $y_n > x_{n_0'}$

$\xRightarrow{\text{Αύξ.}} f(y_n)\ge f(x_{n_0'}) > A-\varepsilon$

$\Rightarrow f(y_n)\to A \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi^-} f(x) = A$

γ) $\forall x<\xi$, $f(x)\le f(\xi)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)\le f(\xi)$

$\forall x>\xi$, $f(x)\ge f(\xi) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi^+} f(x)\ge f(\xi)$

- Η συνάρτηση a^x, $a>0$ $x\in\mathbb{R}$.

• $x\in\mathbb{N}$: $a^x = \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{x\text{-φορές}}$

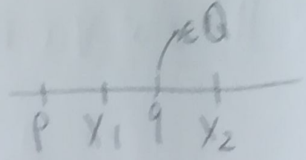
• $x\in\mathbb{Z}, x\le 0$: $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$

• $x\in\mathbb{Q}$: $x=\frac{n}{m}$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{Z}$ $\quad a^x = (a^n)^{\frac{1}{m}}$

• Για $x\in\mathbb{R}$, ορίζουμε: $a^x=\sup\{a^q : q\le x, q\in\mathbb{Q}\}$

• $\boxed{a\ge 1}$: $\forall p,q\in\mathbb{Q}$, $p<q$, $a^p\le a^q$

Θ.δ.ο. a^x αύξουσα (για $a\geq 1$)



Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

Έστω $q \in \mathbb{Q} \cap (x_1, x_2)$ και $p \in \mathbb{Q}$, $p < x_1$

$$\Rightarrow p < q \Rightarrow a^p \leq a^q \Rightarrow \underbrace{\sup\{a^p : p < x_1, p \in \mathbb{Q}\}}_{= a^{x_1}} \leq a^q$$

$$\Rightarrow a^{x_1} \leq a^q, \ \forall q \in \mathbb{Q} \cap (x_1, x_2)$$

$\Rightarrow a^{x_1} \leq a^{x_2} \Rightarrow a^x$: αύξουσα

• $\boxed{0<a<1}$ Θ.δ.ο. a^x φθίνουσα

$\frac{1}{a} > 1 \xRightarrow{\text{παραπάνω}}$ Αν x_1, x_2: $\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} \leq \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2} \Rightarrow a^{x_1} \geq a^{x_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^x$: φθίνουσα

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ειδική περίπτωση: $\boxed{x_0 = 0}$: $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$

$a^{\frac{1}{n}} \to 1$: Για $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0$ ισχύει ότι $|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^{1/n} < 1 + \varepsilon$

$\underbrace{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}_{= a^{-\frac{1}{n}}} \to 1$: $\exists n_0' \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_0'$ ισχύει ότι $|a^{-\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$

Θέτουμε $n_1 = \max\{n_0, n_0'\}$: $1 - \varepsilon < a^{\frac{1}{n_1}} < 1 + \varepsilon$

$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_1}} < 1 + \varepsilon$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

1) Έστω $a \geq 1$ και ακολουθία $y_n \to 0$

$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $-\frac{1}{n_1} < y_n < \frac{1}{n_1}$ $(\forall n \geq n_2)$

Για'αυτό, για $\varepsilon = \frac{1}{n_1} > 0$: $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall n \geq n_2$ $-\varepsilon < y_n < \varepsilon$

$\Rightarrow a^{-\frac{1}{n_1}} \leq a^{y_n} \leq a^{\frac{1}{n_1}}, \forall n \geq n_2$

$\Rightarrow \forall n \geq n_2,\quad 1-\varepsilon < a^{y_n} < 1+\varepsilon \Rightarrow a^{y_n} \to 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$

· Αν $\boxed{0<a<1}$, $\lim\limits_{x \to 0} a^x = \lim\limits_{\cancel{x} \to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} \overset{y=-x}{=\!=\!=} \lim\limits_{y \to 0} \left(\frac{1}{a}\right)^{y} = 1$.

Όμως $\lim\limits_{y \to 0} \left(\frac{1}{a^y}\right) = \lim\limits_{y \to 0} a^y$

$\Rightarrow \lim\limits_{y \to 0} a^y = 1$

<u>Γενική περίπτωση</u>

$\lim\limits_{x \to x_0} a^x = \lim\limits_{x \to x_0} a^{x-x_0} \cdot a^{x_0} = a^{x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} a^{x-x_0} = \lim a^h \cdot a^{x_0} = a^{x_0}$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> (ε-δ)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- $f: A \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 \in A$, αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$,

  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- Αν $x_0 \in A \cap A'$, τότε f συνεχής στο $x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

<u>π.χ.</u> $A = [0,1] \cup \{2\}$

2 όχι σ.σ. του $A \Rightarrow 2$ απομονωμένο σημείο του A

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 απομονωμένο σημείο του A. Τότε f συνεχής στο x_0.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

x_0 απομονωμένο σημείο: $\exists \delta_0 > 0$ τ.ω. $\left((x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \setminus \{x_0\} \right) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \cap A$, $x = x_0$

Έστω $\varepsilon > 0$. Για $\boxed{\delta = \delta_0}$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

· Έστω $f: A \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x)=c, \forall x \in A$. Τότε f συνεχής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $x_0 \in A$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνω π.χ. $\delta = 1$.

$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A$, $|f(x)-f(x_0)| = |c-c| < \varepsilon$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. f συνεχής από τα δεξιά (αντ. αριστερά), αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, τ.ω. $\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \cap A$ (αντ. $\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \cap A$) να ισχύει $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

x_0 σ.σ. του A από δεξιά (αντ. αριστερά)

x_0 σ.σ. του A από τα δεξιά (αντ. αριστερά) τότε f συνεχής

· Αν x_0 σ.σ. του A από τα δεξιά (αντ. αριστερά) αν $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ στο x_0 από τα δεξιά (αντ. αριστερά)

(αντ. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$)

ΑΣΚΗΣΗ 5 / ΦΥΛΛ. 3

$k>0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{k-a_n^2}{2a_n}$, $a_1 > \sqrt{k}$

Ν.δ.ο. $a_n \to \sqrt{k}$

ΛΥΣΗ

Έστω ότι $\{a_n\}$ συγκλίνει και $\lim a_n = l$

$\lim a_{n+1} = \lim a_n + \frac{k-(\lim a_n)^2}{2\lim a_n} \Rightarrow l = l + \frac{k-l^2}{2l}$.

Αν $l \neq 0 \Rightarrow k = l^2 \Rightarrow l = \pm\sqrt{k}$

$\underline{\text{Θ.δ.ο.}}$ $a_n > \sqrt{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(Επαγωγή πάνω στο n)

Για $\boxed{n=1}$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n=\nu$

$a_\nu > \sqrt{k}$

$$a_{\nu+1} = a_\nu + \frac{k - a_\nu^2}{2a_\nu} = \frac{2a_\nu^2 + k - a_\nu^2}{2a_\nu} = \frac{a_\nu^2 + k}{2a_\nu} = \frac{a_\nu}{2} + \frac{k}{2a_\nu}$$

9-12-19

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ)

Έστω $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$, $\xi \in A$, $\eta \in B$, $f(\xi)=\eta$, f συνεχής στο ξ και g συνεχής στο η. Τότε, η $g\circ f$ είναι συνεχής στο ξ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\varepsilon>0$.

- g συνεχής στο η: $\exists \delta>0$ τ.ω. $\forall y \in (\eta-\delta, \eta+\delta)\cap B$, $|g(y)-\underbrace{g(\eta)}_{g(f(\xi))}|<\varepsilon$

- f συνεχής στο ξ:

(για $\varepsilon=\delta$), $\exists \delta'>0$ τ.ω. $\forall x \in (\xi-\delta', \xi+\delta')\cap A$, $\underbrace{|\underbrace{f(x)}_{y}-\underbrace{f(\xi)}_{\eta}|<\delta}_{y\in(\eta-\delta,\eta+\delta)\cap B}$

Άρα δ.ο. $\exists \delta'>0$ τ.ω. $\forall x \in (\xi-\delta', \xi+\delta')\cap A$, $|g(f(x))-g((f(\xi))|<\varepsilon$

Άρα $g\circ f$ συνεχής στο ξ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f,g: A\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $\xi\in A$ (αντ. από δεξιά ή αριστερά)

$\Rightarrow$ i) $\lambda f+\mu g$ συνεχής στο ξ, $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

ii) $f\cdot g$ — ıı — — ıı —

iii) $\frac{f}{g}$ — ıı — — ıı — , αν $g(\xi)\neq 0$

$\{ |f| = g\circ f$, όπου $g(x)=|x|$ (είναι δεδομένο ότι f: συνεχής)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

· Έστω ότι ξ είναι σ.σ. του A.

Τότε $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$ (επειδή f συνεχής στο ξ)

$\lim\limits_{x\to\xi} g(x)=g(\xi)$ (επειδή g — " — " —)

$\xRightarrow[\text{ΟΡΙΩΝ}]{\text{ΑΛΓΕΒΡΑ}} \lim\limits_{x\to\xi}(\lambda f(x)+\mu g(x))=\lambda f(\xi)+\mu g(\xi) \overset{\text{ν}}{\Rightarrow}$ $\lambda\cdot f+\mu\cdot g$ συνεχής στο ξ

Ομοίως για τα (ii), (iii)

Γ. Έστω ότι ξ είναι απομονωμένο σημείο του A.

$\Rightarrow \lambda\cdot f+\mu\cdot g,\ f\cdot g,\ f/g$ συνεχείς στο ξ (εξ' ορισμού)

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ τ.ω. f συνεχής στο $[a,b]$.

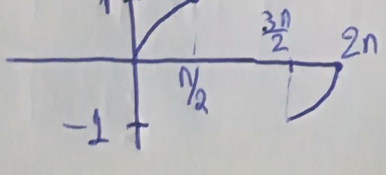
Τότε $\exists\, m,M\in\mathbb{R}$ τ.ω. $m=\min\{f(x): x\in[a,b]\}$
$M=\max\{f(x): x\in[a,b]\}$

Συνέπεια: Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι φραγμένη.

π.χ. (1) $f:(0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$ όχι φραγμένη

(2) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1\\ 1, & 1\le x\end{cases}$ όχι συνεχής αφού D_f όχι κλειστό αλλά φραγμένο

$f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\eta\mu x$



ΘΕΩΡΗΜΑ

A,B κλειστά διαστήματα και ξένα ($A \cap B = \emptyset$)

Έστω $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \cup B \to \mathbb{R}$ τ.ω. f συνεχής στο A και f συνεχής στο B.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\varepsilon > 0$, $\xi \in A \cup B$

f συνεχής στο A. Αν $\xi \in A$, $\exists \delta_1 > 0$ τ.ω. $\forall x \in (\xi - \delta_1, \xi + \delta_1) \cap A : |f(x) - f(\xi$

Αν $\xi \in B$, $\exists \delta_2 > 0$ τ.ω. $\forall x \in (\xi - \delta_2, \xi + \delta_2) \cap B : |f(x) - f(\xi)|$

Για $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap (A \cup B) : |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$

$\Rightarrow f$: συνεχής στο ξ ($f: A \cup B \to \mathbb{R}$)

$\Rightarrow f$: συνεχής στο $A \cup B$

2η ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $A = [a, b]$, $B [\gamma, \delta]$ όπου $b < \gamma$

Αν $\xi \in [a, b) \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$

Αν $\xi \in (\gamma, \delta] \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$

Αν $\xi = \gamma \Rightarrow \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (Θ. ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ)

Θέτουμε $m = \inf \underbrace{\{f(x) : x \in [a, b]\}}_{f([a,b])} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$\exists \{y_n\}$ από το $f([a,b])$, τ.ω. $y_n \to m$

$\forall n\in\mathbb{N}, \exists \{x_n\}\in[a,b]$ τ.ω. $y_n=f(x_n)$

$\{x_n\}$ φραγμένη $\xrightarrow{B-W}$ $\exists x_0\in[a,b]$

$\exists\{x_{k_n}\}$ υπακολουθία της $\{x_n\}$ τ.ω. $x_n\to x_0$

$\xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(x_{k_n})\to f(x_0) \Rightarrow m=f(x_0)\in f([a,b]) \Rightarrow m=\min f([a,b])$

$\parallel$

y_{k_n}

m

$a \quad \frac{a+b}{2} \quad b$

$f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ ή $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)<0$

ή $\frac{a+b}{2}=0$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (Bolzano)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής με $f(a)\cdot f(b)<0$. Τότε, $\exists\xi\in(a,b)$ τ.ω. $f(\xi)=0$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Θέτουμε $[a_1,b_1]=[a,b]$

- Αν $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, τέλος.
- Αν $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(a)<0$, θέτουμε $[a_2,b_2]=\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$
- Αν $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)<0$, θέτουμε $[a_2,b_2]=\left[\frac{a+b}{2},b\right]$

Άρα, <u>είτε</u> $\exists\xi\in(a,b)$ τ.ω. $f(\xi)=0$ <u>είτε</u> $\exists[a_2,b_2]\subseteq[a_1,b_1]$ με

$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)$ και $f(a_2)f(b_2)<0$

Είτε, $\exists\xi\in(a_2,b_2)\subseteq(a,b)$ τ.ω. $f(\xi)=0$ είτε $\exists[a_3,b_3]\subseteq[a_2,b_2]$ με

$f(a_3)\cdot f(b_3)<0$ και $b_3-a_3=\frac{1}{2}(a_2-b_2)$ κ.ο.κ.

Είτε, $\exists\xi\in(a_n,b_n)\subseteq(a,b)$ τ.ω. $f(\xi)=0$. Είτε $\exists[a_{n+1},b_{n+1}]$ τ.ω. $f(a_{n+1})\cdot f(b_{n+1})<0$

και $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)$

Αν $\nexists\ \xi\in(a,b)$ τ.ω. $f(\xi)=0$, τότε $\exists\ \{[a_n,b_n]\}$ τ.ω.:

(i) $f(a_n)\cdot f(b_n)<0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

(ii) $b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$

(iii) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n],\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$(ii)\Rightarrow b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(b_{n-1}-a_{n-1})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(b_{n-2}-a_{n-2})=\dots=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(b_1-a_1)\to 0$$

$\Rightarrow b_n-a_n\to 0$

Έχουμε δείξει ότι $\exists\ \xi'\in[a_1,b_1]$ τ.ω. $a_n\to\xi$ και $b_n\to\xi$

$$\Rightarrow \underbrace{f(a_n)\cdot f(b_n)}_{0}\to f(\xi)\cdot f(\xi)=(f(\xi))^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0\geq \lim[f(a_n)\cdot f(b_n)]=[f(\xi)]^2\Rightarrow f(\xi)=0$$

άτοπο.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (Θ.Ε.Τ.)

Έστω $f: I$ (διά-στημα) $\to\mathbb{R}$, f συνεχής και y_1, y_2 τιμές της f ($\rightarrow \exists\ x_1,x_2\in I$ τ.ω. $y_1=f(x_1)$ και $y_2=f(x_2)$). Τότε αν y μεταξύ των y_1,y_2, $\exists\ \xi\in I$ τ.ω. $y=f(\xi)$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Έστω ότι $x_1<x_2$. Έστω $g:[x_1,x_2]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=f(x)-y$

· Αν $\boxed{y_1<y<y_2}$: $g(x_1)\cdot g(x_2)<0 \xRightarrow{\text{Bolzano}}$
$\Rightarrow \exists\, \xi \in (x_1,x_2) \subseteq I$ τ.ω. $f(\xi)=y$

· Αν $\boxed{y_2<y<y_1}$: Ομοίως

· Αν $\boxed{y=y_2 \text{ ή } y=y_1}$: $f(x_2)=y$ ή $f(x_1)=y$
(δηλ. $\xi=x_2$ ή $\xi=x_1$)

11-12-19

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Ν.δ.ο. η εξίσωση $\sigma v \nu x = x$ έχει μία τουλ. ρίζα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $f(x) = \sigma v \nu x - x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(0) = 1 > 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$

$f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \xrightarrow{f \text{ συνεχής}} \exists \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \sigma v \nu \xi = \xi$

2) Έστω $p(x)$: πολυώνυμο περιττού βαθμού. Τότε $\exists \xi \in \mathbb{R}$, $p(\xi) = 0$

ΛΥΣΗ

$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, n περιττός, $a_n \neq 0$

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right) = \overset{\text{πρόσημο}}{sgn(a_n)} \cdot (+\infty)$$

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} x^n \left(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n \right) = \overset{\text{πρόσημο}}{sgn(a_n)} \cdot (-\infty)$$

$\Rightarrow \exists \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $p(\xi_1) > 0$, $p(\xi_2) < 0$

$\Rightarrow p(\xi_1) \cdot p(\xi_2) < 0 \xrightarrow{p: \text{ συνεχής}} \exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τ.ω. $p(\xi) = 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής, I: διάστημα. Αν f: συνεχής, τότε $f(I)$ διάστημα (συμπεριλαμβανομένου και του μονοσυνόλου)

Έστω f: όχι σταθερή. Θέτουμε $m = \inf f(I)$, $M = \sup f(I)$.

($m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Τότε $m < M$

Αρκεί ν.δ.ο. $(m, M) \subseteq f(I)$

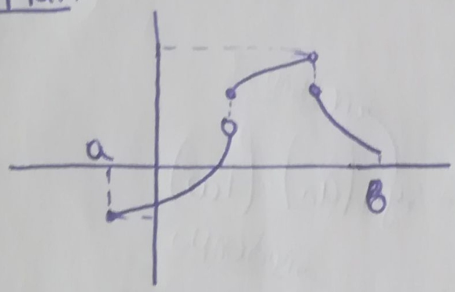
Έστω $y \in (m, M)$. Τότε $y > m$. Τότε $\exists y_1 \geq m$, τ.ω. $y_1 \in f(I)$ $y_1 < y$

Αν όχι, θα ισχύει: $\forall z \in f(I)$, $z \geq y \Rightarrow y$ θα ήταν κάτω φράγμα του $f(I)$, δηλαδή $m \geq y$

Ομοίως $\exists y_2 \in f(I)$, $y_2 \leq M$ και $y_2 > y$.

Από Θ.Ε.Τ., y είναι τιμή της $f \Rightarrow y \in f(I)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



ΘΕΩΡΗΜΑ (2)

Έστω $f: I \xrightarrow{\text{διάστημα}} f(I)$ γν. μονότονη και συνεχής (1-1, επί).

Τότε η $f^{-1}: f(I) \to I$ είναι γν. μονότονη (με την ίδια μονοτονία) και συνεχής

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι f γν. αύξουσα. Έστω $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$.

$\exists x_1, x_2 \in I$ τ.ω. $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$.

$\Longleftrightarrow x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_1)$

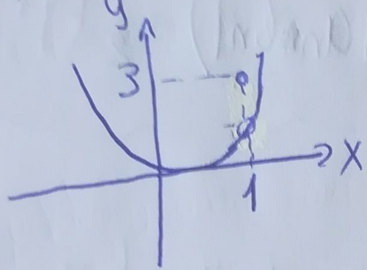
Αρκεί ν.δ.ο. $x_1 < x_2$

Είδη ασυνέχειας

1) $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει αλλά είναι διαφορετικό της $f(\xi)$
(Τότε η ασυνέχεια λέγεται εξουδετερώσιμη)

2) $\lim_{x\to\xi^{\pm}} f(x)$ υπάρχουν και είναι διαφορετικά
($\lim_{x\to\xi^+} f(x) - \lim_{x\to\xi^-} f(x) \neq 0$, άλμα της f στο ξ)
Τότε η ασυνέχεια λέγεται 1ου είδους.

3) Ένα τουλάχιστον από τα πλευρικά όρια στο ξ δεν υπάρχει ή είναι $\pm\infty$. (Αυτή η ασυνέχεια ονομάζεται 2ου είδους)



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

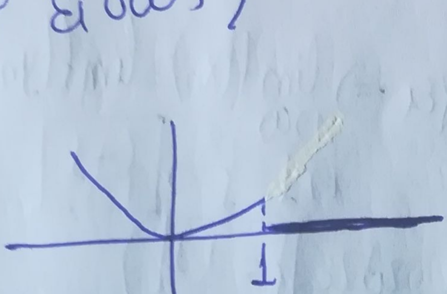
1) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

(Εξουδετερώσιμη)

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ (2ου είδους)

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$



3) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$

(1ου είδους)

4) $f(x)=\begin{cases} ημ\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$

(2ου είδους), γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ δεν υπάρχει

5) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ 1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

ΑΣΚΗΣΗ 2/ΦΥΛ.4

Αν $a_n, b_n \to \xi$ τότε $\min\{a_n,b_n\}, \max\{a_n,b_n\} \to \xi$

ΛΥΣΗ

$$\max\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}\left(a_n+b_n+|a_n-b_n|\right)\to\frac{1}{2}\left(\xi+\xi+|\xi-\xi|\right)=\xi$$

$$\min\{a_n,b_n\}=\frac{1}{2}\left(a_n+b_n-|a_n-b_n|\right)\to\frac{1}{2}\left(\xi+\xi-|\xi-\xi|\right)=\xi$$

ΛΥΣΗ

Έστω $\xi\in\mathbb{R}$ και $y_n, x_n\to\xi$ με $x_n, y_n>\xi, \forall n\in\mathbb{N}$ και $x_n\in\mathbb{Q}, \forall n\in\mathbb{N}$

$y_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \forall n\in\mathbb{N}$.

$f(x_n)=x_n^2\to\xi^2$

$f(y_n)=1\to 1$

Άρα, αν $\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x)$ υπάρχει $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim f(y_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1=\xi^2 \Rightarrow \boxed{\xi=\pm 1}$

(Ομοίως, αν $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x)$ υπάρχει, τότε $\boxed{\xi=\pm 1}$)

Άρα, αν $\xi\neq\pm 1$, η f είναι ασυνεχής στο ξ και μάλιστα η ασυνέχεια είναι 2ου είδους.

Αν $x_1 > x_2 \xRightarrow{f:\text{αύξουσα}} y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ ΑΤΟΠΟ

$\Rightarrow \forall y_1, y_2 \in I$, με $y_1 < y_2$ ισχύει $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Rightarrow f^{-1}$ γν. αύξουσα

Συνέχεια:

Έστω $y_0 \in f(I)$ και $\{y_n\}$ ακολουθία από το $f(I)$ τ.ω. $y_n \to y_0$.

Αρκεί ν.δ.ο. $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$

$\exists x_0, x_1, x_2, \ldots$ τ.ω. $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \ldots$

$\exists \xi_1 \leq y_0 \leq \xi_2$, όπου $\xi_1 < \xi_2$ και $\xi_1, \xi_2 \in f(I)$

$\exists \eta_1 < \eta_2$, $\eta_1, \eta_2 \in I$ τ.ω. $\xi_1 = f(\eta_1)$, $\xi_2 = f(\eta_2)$

Άρα αρκεί να υποθέσουμε εξ' αρχής ότι $I = [\eta_1, \eta_2]$

Τότε, $\{x_n\}$ φραγμένη. Έστω υπακολουθία $\{x_{k_n}\}$ και $x_0' \in I$ τ.ω.

$x_{k_n} \to x_0'$

$$\xRightarrow{f \text{ συνεχής}} \underbrace{f(x_{k_n})}_{= y_{k_n} \to y_0} \to f(x_0') \Rightarrow \underbrace{y_0}_{= f(x_0)} = f(x_0')$$

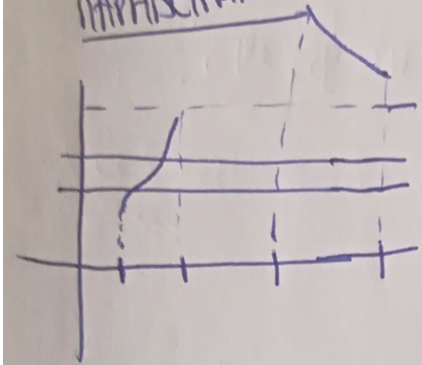
$$\xRightarrow{f\ 1\text{-}1} \underbrace{x_0}_{= f^{-1}(y_0)} = x_0' \Rightarrow \underbrace{x_{k_n}}_{= f^{-1}(y_{k_n})} \to \underbrace{x_0}_{= f^{-1}(y_0)}$$

$\Rightarrow \{f^{-1}(y_n)\}$ φραγμένη και κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία της $\{f^{-1}(y_n)\}$ συγκλίνει στο $f^{-1}(y_0) \Rightarrow f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$

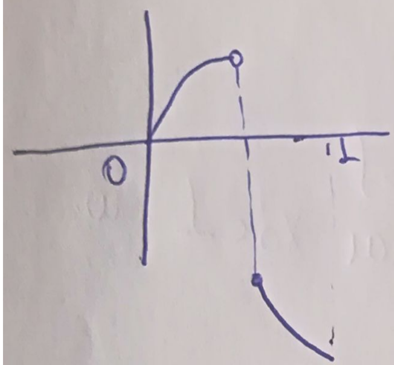
ΘΕΩΡΗΜΑ ③

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 $\Rightarrow$ f: γν. μονότονη

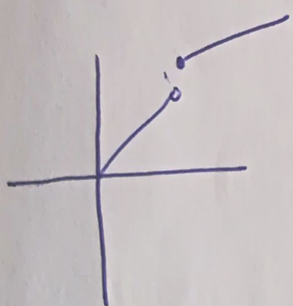
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ



1-1 συνεχής όχι γν. μονότονη



Ορίζεται σε διάστημα, είναι 1-1, όχι γν. μονότονη



Γνησίως μονότονη αλλά όχι συνεχής

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι f όχι γν. μονότονη. Τότε, $\exists\, x_1, x_2, x_3 \in I$ με $x_1 < x_2 < x_3$ και
$(f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ ή $f(x_3) > f(x_1) > f(x_2)$ ή $f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$ ή $f(x_2) > f(x_1) > f(x_3)$

Έστω ότι $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ (τα άλλα ομοίως)
ΘΕΤ $\Rightarrow \exists\, \xi \in [x_1, x_2]$ τ.ω. $f(\xi) = f(x_2)$, άτοπο γιατί f όχι 1-1.

Θ.δ.ο. f συνεχής στο $\xi=1$

Έστω $\{x_n\}$ ακολουθία τ.ω. $x_n \to 1$

Αρκεί ν.δ.ο. $f(x_n) \to f(1)=1$

$f(x_n) = x_n^2 \underline{\underline{\geq}} 1$

$\Rightarrow \min\{x_n^2, 1\} \leq f(x_n) \leq \max\{\underset{a_n}{x_n^2}, \underset{b_n}{1}\} \to 1$

$\swarrow$ 1

$\xRightarrow{\text{Κρ. παρεμβολής}} f(x_n) \to 1 \Rightarrow f$: συνεχής στο $\xi=1$

ΑΣΚΗΣΗ

$a_1^2 > k > 0$, $a_{n+1} = a_n + \frac{k - a_n^2}{2a_n}$

Ν.δ.ο. $a_n^2 \to k'$

ΛΥΣΗ

· Θ.δ.ο. $a_n^2 > k'$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(Με επαγωγή στο n)

Για $n=1$ ισχύει

Έστω ότι ισχύει για $n=k$

Θ.δ.ο. ισχύει για $n=k+1$

$a_{k+1}^2 = \cancel{a_k^2} + \frac{(k'-a_k)^2}{4a_k^2} + k' - \cancel{a_k^2} > k'$

Ειδικότερα, $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

• Έστω ότι $a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{k' + a_n^2}{2a_n} > 0$

Άρα, αν $a_1 > 0 \Rightarrow a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Όμως, αν $a_1 < 0 \Rightarrow a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Έστω ότι $a_1 > 0 \Rightarrow a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \dfrac{k' - a_n^2}{2a_n} < 0$

$\Rightarrow \{a_n\}$ φθίνουσα και $0 < a_n \leq a, \forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ φθίνουσα και φραγμένη $\Rightarrow \{a_n\}$ συγκλίνει και μάλιστα αν $l = \lim a_n$ τότε $l \neq 0$

Ομοίως, αν $a_1 < 0$ τότε $\{a_n\}$ συγκλίνει και αν

$l = \lim a_n \Rightarrow l \neq 0$

Άρα, $\lim a_{n+1} = \lim a_n + \dfrac{k' - (\lim a_n)^2}{2 \lim a_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow l = l + \dfrac{k' - l^2}{2l} \Rightarrow k' - l^2 = 0 \Rightarrow l^2 = k' \Rightarrow \lim a_n^2 = k'$

$\Rightarrow a_n^2 \to k'$

• ______________________ •

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$.

· $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ αν a σ.σ. του A

· $f'_{\pm}(a) = \lim_{x\to a^{\pm}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ αν a σ.σ. από τα δεξιά ή τα αριστερά αντίστοιχα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

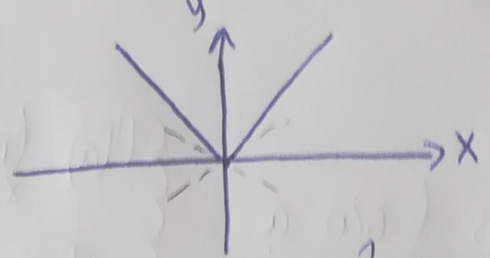
1) $f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x-a}=1$$

2) $f(x)=c,\ x\in\mathbb{R}$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{c-c}{x-a}=0$$

3) $f(x)=|x|$



$$\left.\begin{aligned} f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1\\ f'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{-x-0}{x-0}=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nexists f'(0)$$

· Η f είναι παρ/μη στο $x=a \Leftrightarrow$ οι $f'_{\pm}(a)$ υπάρχουν και είναι ίσες.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω η f είναι παρ/μη στο $x=a$. Τότε η f είναι συνεχής στο $x=a$ (από δεξιά ή αριστερά)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

$\Rightarrow$ Έστω $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ τ.ω. $\forall x\in\left((a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}\right)\cap A$, $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall x\in B$, $^{*}f(x)-f(a)<(f'(a)+\varepsilon)(x-a)$

$*(f'(a)+\varepsilon)(x-a)<$

Θέτω $\delta'=\min\left\{\frac{\varepsilon}{|f'(a)|+\varepsilon},\delta\right\}$

$\forall x\in\left((a-\delta',a+\delta')\setminus\{a\}\right)\cap A$, $(f'(a)+\varepsilon)(x-a)<\varepsilon$

$(f'(a)-\varepsilon)(x-a)>-\varepsilon$

$\Rightarrow \forall x\in\left((a-\delta',a+\delta')\setminus\{\delta\}\right)\cap A$, $-\varepsilon<f(x)-f(a)<\varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

$\left\{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right\}$

Συμμετρική παράγωγος της f στο a

$$f'_s(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right]$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\overset{y=-h}{=\!=}\lim_{y\to 0^-}\frac{f(a)-f(a+y)}{-y}=\lim_{y\to 0^-}\frac{f(a+y)-f(a)}{y}=f'_-(a)$$

$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(f'_+(a)+f'_-(a)\right)$ και ομοίως:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(f'_+(a)+f'_-(a)\right)$$

Άρα, αν $f'_{\pm}(a)$ υπάρχουν, τότε $f'_s(a) = \frac{1}{2}\left(f'_+(a) + f'_-(a)\right)$

Αν f παρ/μη στο $x=a$, τότε $f'_s(a) = f'(a)$

• Αν $f'_s(a)$ υπάρχει $\not\Longrightarrow$ $f'_{\pm}(a)$ υπάρχουν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $f(x) = \begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

$\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} =$ $\lim\limits_{x\to 0^{\pm}} \eta\mu\frac{1}{x}$, δεν υπάρχει

$f'_s(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h} = 0$

2) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, παρ/μη στο 0, $\{x_n\}, \{y_n\}$ τ.ω. $-1 < y_n < 0 < x_n < 1, \forall n\in\mathbb{N}$

Αν $x_n, y_n \to 0$, ν.δ.ο. $\lim \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = \underbrace{\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}}_{=a_n} \cdot \underbrace{\frac{x_n-0}{x_n-y_n}}_{=\lambda_n} + \underbrace{\frac{f(0)-f(y_n)}{0-y_n}}_{=b_n} \cdot \underbrace{\frac{-y_n}{x_n-y_n}}_{=1-\lambda_n}$

$a_n \to f'(0)$ (υπακολουθία ακολουθίας σειρά του ορίου)

$b_n \to f'(0)$ (—||— —||— —||—)

$0<\lambda_n \leq 1, \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n} = a_n\lambda_n + b_n(1-\lambda_n) = \underbrace{\lambda_n(a_n-b_n)}_{\text{μηδενική x φραγμένη}} + b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 + f'(0) = f'(0)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, a σ.σ. του A και f, g παρ/μες στο a. Τότε:

i) $[k \cdot f(a)]' = k \cdot f'(a)$, $k \in \mathbb{R}$

ii) $[f+g]'(a) = f'(a) + g'(a)$

iii) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$, αν $g(a) \neq 0$

(ομοίως για τις f'_+, g'_+ και τις f'_-, g'_-)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

iii) $\frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x)}{x-a} + \frac{f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} =$

$$= g(x) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \xrightarrow[\substack{g: \text{συνεχής} \\ \text{στο } a}]{x \to a} g(a) f'(a) + f(a) g'(a)$$

iv) $$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{g(a) - g(x)}{(x-a) \cdot g(x) \cdot g(a)} = \frac{-1}{g(x) \cdot g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \xrightarrow{x \to a} \frac{-1}{[g(a)]^2} \cdot g'(a)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g(a)}{[g(a)]^2}$$

Γενική περίπτωση

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) \overset{(iii)}{=} f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} + f(a) \cdot \frac{-g'(a)}{[g(a)]^2} =$$

$$= \frac{f'(a) \cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a)}{[g(a)]^2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f παρ/μη στο a, g παρ/μη στο f(a) (όπου gof ορίζεται καλώς).

Τότε, gof παρ/μη στο a με $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} g'(f(a))f'(a)$$

Επειδή f συνεχής στο $x=a$, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} = g'(f(a))$$

ΑΣΚΗΣΗ

Θέτουμε $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

N.δ.ο. το lim υπάρχει.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τις ακολουθίες $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$0 \leq a_n \leq b_n$

Θ.δ.ο. $\{a_n\}$ αύξουσα και $\{b_n\}$ φθίνουσα, άρα $0 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$

$\Rightarrow \{a_n\}$ μονότονη και φραγμένη $\Rightarrow \{a_n\}$ συγκλίνει

• $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right) =$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

Bernoulli: $\Rightarrow \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \geq \left(1-n\cdot\frac{1}{n^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1$

$\Rightarrow a_n \geq a_{n-1} \Rightarrow \{a_n\}$: αύξουσα

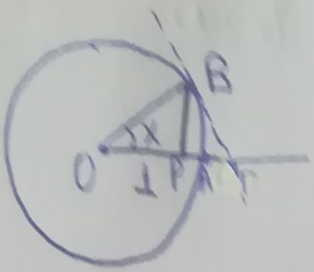
$\cdot\ n \geq 2,\ \dfrac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\dfrac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \dfrac{n}{n+1}$

Bernoulli; $\Rightarrow \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$

$\Rightarrow b_{n-1} \leq b_n \Rightarrow \{b_n\}$: φθίνουσα

18-12-19

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$



$0 < x < \frac{\pi}{2}$

$E(O\hat{A}B) \le E(O\hat{A}B) \le E(O\hat{B}\Gamma)$ (1) → κυκλικός τομέας

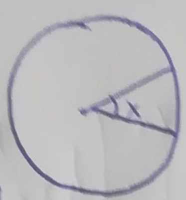
- $E(O\hat{A}B) = \frac{1}{2}\cdot BP = \frac{1}{2}\cdot \eta\mu x$

$(BP = \eta\mu x)$

- $E(O\hat{B}\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot B\Gamma = \frac{1}{2}\cdot \varepsilon\varphi x$

$(B\Gamma = \varepsilon\varphi x)$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ $E(O\hat{A}B)$



rad	Εμβαδόν
2π	π
x ;	;

$\Rightarrow E(O\hat{A}B) = \frac{x}{2}$

$(1) \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\eta\mu x \le \frac{x}{2} \le \frac{1}{2}\cdot\varepsilon\varphi x \Rightarrow \eta\mu x \le x \le \underbrace{\varepsilon\varphi x}_{=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\eta\mu x}{x} \le 1$

$\Rightarrow \frac{\eta\mu x}{x} \ge \sigma\upsilon\nu x$

- $\sigma\upsilon\nu x = 1 - 2\eta\mu^2\frac{x}{2} \ge 1 - 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2$

Οπότε από τα παραπάνω έχουμε: $1 - \frac{x^2}{2} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\eta\mu x}{x} \overset{x=-y}{=\!=} \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\eta\mu(-y)}{-y} = \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\eta\mu y}{y} = 1$

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a,\ a\in\mathbb{R}$

$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (θέτουμε $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Έστω $\{x_n\}$ αύξουσα ακολουθία θετικών τ.ω. $x_n \to \infty$

Θέτουμε $k_n = [x_n] \Rightarrow x_n - 1 \le k_n \le x_n$

$- \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = ;$

$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}$

$\cdot \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \cdot \left(1+\frac{1}{k_n}\right) \to e$, αφού $\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} = a_{k_n}$

$\cdot \left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} = \left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} \to e$, αφού $\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} = a_{k_n+1}$

$\xrightarrow[\text{παρεμβολής}]{\text{κριτήριο}} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \infty$

$\cdot$ Για το: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \overset{x=-(y+1)}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to\infty} \left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-(y+1)} = \lim\limits_{y\to\infty} \left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} =$

$= \lim\limits_{y\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} \cdot \left(1+\frac{1}{y}\right)\right] = e$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^{a} \overset{\frac{x}{a}=y}{=\!=\!=} \lim\limits_{y\to\pm\infty} \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{a} = e^{a}$

$\circ$ ——— $\circ$

$\cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$e^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{x}{y}\right)^y = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+n\cdot\frac{x}{n}\right) = 1+x$

$\Rightarrow \boxed{e^x \geq 1+x, \ \forall x\in\mathbb{R}}$ ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

$\Rightarrow e^{-x}\geq 1-x, \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow e^x \leq \frac{1}{1-x}, \ \forall x<1$

Άρα, για $\boxed{0<x<1}$: $1\leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{\frac{1}{1-x}-1}{x} = \frac{1}{1-x}$

$\boxed{x<0}$: $1\geq \frac{e^x-1}{x}\geq\frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} =$

$\cdot \lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

Θέτουμε $x=e^y$ (Μπορούμε να θέσουμε επειδή e^x 1-1)

Άρα το δοθέν όριο είναι: $\lim_{y\to0}\frac{y}{e^y-1}=1$

$\cdot (a^x)' = (\ln a)\,a^x, \ x\in\mathbb{R} \ a>0$

$\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \frac{a^x\cdot a^h - a^x}{h} = a^x\,\frac{a^h-1}{h} = a^x\cdot\frac{e^{\ln a^h}-1}{h} = a^x\,\frac{e^{h\cdot\ln a}-1}{h} = a^x\ln a\cdot\frac{e^{h\ln a}-1}{h\ln a}$

$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \overset{y=h\ln a}{=\!=\!=} a^x\ln a\cdot\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y} = a^x\ln a$

$\cdot (x^a)' = a x^{a-1}$, $a>0$ $x>0$

$(x^a)' = (e^{\ln x^a})' = (e^{a\ln x})' = (a\cdot\ln x)' \cdot e^{a\ln x} = \frac{a}{x} x^a = a\cdot x^{a-1}$

- Αν $\boxed{a\in\mathbb{Z}}$: $(x^a)' = a\cdot x^{a-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

- Αν $\boxed{a>1}$: $(x^a)' = 0$ στο $x=0$

θέτω $f(x) = x^a$

$\Rightarrow f(-x) = \begin{cases} x^a, & a: \text{άρτιος} \\ -x^a, & a: \text{περιττός} \end{cases}$

- Αν a: άρτιος και $x<0$: $f(x) = f(-x)$

$f'(x) = [f'(x)]' = (-x)' \cdot f'(-x) = -a\cdot(-x)^{a-1} \underline{\underline{a-1: \text{περιττός}}}$

$= -(-a\cdot x^{a-1}) = a\cdot x^{a-1}$

- Αν a: περιττός: $x^a = x\cdot x^{a-1}$

$\Rightarrow (x^a)' = (x\cdot x^{a-1})' = x'\cdot x^{a-1} + x\cdot (x^{a-1})' \underline{\underline{(a-1): \text{άρτιος}}} \; x^{a-1} + x\cdot(a-1)\cdot x^{a-2} =$

$= a\cdot x^{a-1}$, $\forall x\neq 0$

- Για $\boxed{a>1}$: $(x^a)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h}$

$\lim_{h\to 0} \frac{h^a - 0^a}{h} = \lim_{h\to 0} h^{a-1} = 0$

$\cdot (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$(\eta\mu x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\eta\mu\frac{h}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{h}{2}\right)\right] =$

$= \sigma\upsilon\nu x\cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x$, αν $\sigma\upsilon\nu x$: συνεχής συνάρτηση

Θ.δ.ο. $\sigma\upsilon\nu x$: συνεχής

$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ Άρα αρκεί ν.δ.ο. $\eta\mu x$: συνεχής

Αρκεί ν.δ.ο. $|\eta\mu(x+h)-\eta\mu x| \xrightarrow{h\to 0} 0$

· $|\eta\mu(x+h)-\eta\mu x| = \left|2\eta\mu\frac{h}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|$ (μηδενική επί φραγμένη)

Γνωρίζουμε ότι: $\dfrac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \xrightarrow{h\to 0} 1 \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\eta\mu\frac{h}{2}=0$. Αλλιώς $\nexists \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\eta\mu\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

· $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(\sigma\upsilon\nu x)' = \left[\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]' = \eta\mu'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1) = -\eta\mu x$

$y=f(x) = \frac{dy}{dx}\ f'(x)$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (αντίστροφης συνάρτησης)

Έστω $f: I\to\mathbb{R}$ ~~παρ/μη και γνησίως μονότονη~~ $1-1$ (I: διάστημα)

Έστω $x_0\in I$, τ.ω. η f να είναι παρ/μη στο x_0 με $f'(x_0)\neq 0$.

Θεωρούμε την $g: f(I)\to I$, όπου $g=f^{-1}$.

Τότε η g είναι παρ/μη στο $f(x_0)$ και $g'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτουμε $y_0=f(x_0)$. $g'(y_0) = \lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

(θέτω $y=f(x)$)

• Η $\ln y$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της e^x.

Θέτουμε $f(x)=e^x$, $g(y)=\ln y$ και έστω $y_0>0$

Τότε $y_0=e^{x_0}$, $x_0=\ln y_0$

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{e^{x_0}}=\frac{1}{y_0}$$

$$\Rightarrow (\ln y)'=\frac{1}{y},\ y>0$$

8-1-20

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $f: I \to \mathbb{R}$ (I: διάστημα) και f παραγ/μη στο I, τότε:

i) Αν f: αύξουσα $\Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in I$

ii) Αν f: φθίνουσα $\Rightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in I$

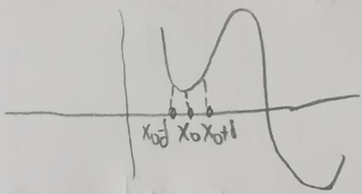
ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $x_0 \in [a,b]$ ονομάζεται σημείο ολικού μεγίστου της f αν $f(x_0) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$

·Ομοίως x_0: σημείο ολικού ελαχίστου αν $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

·Έστω $x_0 \in (a,b)$. Το x_0 ονομάζεται σημείο τοπικού ελαχίστου αν $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $f(x_0) \leq f(x)$

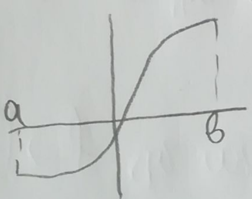
·Έστω $x_0 \in (a,b)$. Το x_0 ονομάζεται σημείο τοπικού μεγίστου αν $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $f(x_0) \geq f(x)$.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν x_0 είναι σημείο ολικού μεγίστου ή ελαχίστου της f και $x_0 \neq a, b \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0$: σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f.



·Ολικό μέγιστο ή ολικό ελάχιστο ονομάζεται ολικό ακρότατο.

·Τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο ονομάζεται τοπικό ακρότατο.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ σημείο τοπικού ακροτάτου της f. Αν η f είναι παράγωγη στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω π.χ. ότι x_0: σημείο τοπικού μεγίστου.

$\exists \delta>0$, τ.ω. $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

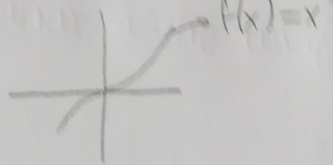
$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \quad \left(\text{επειδή } \begin{matrix} f(x)-f(x_0)\leq 0 \\ x-x_0<0 \end{matrix}\right)$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0 \quad \left(\text{επειδή } \begin{matrix} f(x)-f(x_0)\leq 0 \\ x-x_0>0 \end{matrix}\right)$$

$\Rightarrow f'(x_0)=0$

· Αν $f'(x_0)=0 \not\Rightarrow$ Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.

π.χ. $f(x)=x^3$, $x\in[-1,1]$, $x_0=0$



· ——— ·

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και παράγωγη στο (a,b).

Αν $f(a)=f(b)$, τότε $\exists \xi\in(a,b)$ τ.ω. $f'(\xi)=0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Έστω x_0 σημείο ολικού μεγίστου της f.

Αν $x_0\neq a,b$ τότε x_0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $f \Rightarrow f'(x_0)=0$

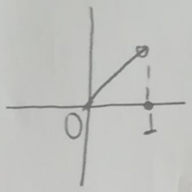
Αν $x_0=a$ ή $x_0=b$: $\exists x_1\in[a,b]$, τ.ω. το x_1: σημείο ολικού ελαχίστου της f.

Αν $x_1\neq a,b$ τότε $f'(x_1)=0$ (γιατί x_1: σημείο τοπικού ελαχίστου)

Αν $x_1=a$ ή $b \Rightarrow f$: σταθερή $\Rightarrow f' \equiv 0$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ</u> (Θ. ROLLE)

1) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$



$f(0)=f(1)$, f παρ/μη στο $(0,1)$

Όμως όχι συνεχής στο $[0,1]$

$f'(x)\neq 0,\ \forall x\in(0,1)$

2) $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 1-x, & \frac{1}{2}<x\le 1 \end{cases}$

συνεχής στο $[0,1]$, $f(0)=f(1)$

αλλά όχι παρ/μη στο $(0,1)$

$f'(x)\neq 0,\ \forall x\in(0,1)\setminus\{\frac{1}{2}\}$

3) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in[0,1) \\ \frac{1}{3}x, & x\in[2,3] \end{cases}$

Για να ισχύει το Θ. Rolle, πρέπει η f να ορίζεται σε διάστημα και όχι ένωση διαστημάτων

$f(0)=f(3)$

f παρ/μη στο $[0,1)\cup[2,3]$

$f'(x)\neq 0,\ \forall x\in[0,1)\cup[2,3]$

ΘΜΤ (Lagrange)

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παρ/μη στο (α,β).

Τότε $\exists\, \xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτουμε $g(x)=f(x)-\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot x$, $x\in[\alpha,\beta]$

$$g(\alpha)=f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot\alpha=\frac{f(\alpha)\cdot\beta-f(\beta)\cdot\alpha}{\beta-\alpha}$$

$$g(\beta)=f(\beta)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot\beta=\frac{f(\alpha)\cdot\beta-f(\beta)\cdot\alpha}{\beta-\alpha}$$

$\Rightarrow g(\alpha)=g(\beta)$

Από Θ. Rolle, $\exists\,\xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. $g'(\xi)=0$.

$$\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

διάστημα

Έστω $f:I\to\mathbb{R}$, συνεχής στο I και παρ/μη στο I εκτός ίσως από τα άκρα του I.

i) Αν $f'(x)\geq 0$ (αντ. >0), $\forall x\in I$ (εκτός ίσως από τα άκρα, τότε η f είναι αύξουσα (αντ. γν. αύξουσα στο I

ii) Αν $f'(x)\leq 0$ (αντ. <0) . . . , τότε η f είναι φθίνουσα (αντ. γνησίως φθίνουσα) στο I

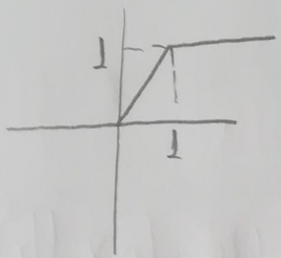
iii) Αν $f'(x)=0$, . . . , τότε η f είναι σταθερή.

Έστω $x\in\mathbb{R}$ με $x<x_0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \left(\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)\right)$$

Ομοίως, $f'_+(x_0)\geq 0$

π.χ. $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$



$f'_-(1)=1$

$f'_-(0)=0$

ΘΜΤ (Cauchy)

Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$, παρ/μες στο (a,b) και $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$. Τότε $\exists \xi\in(a,b)$ τ.ω. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$g(b)\neq g(a)$ and Θ. Rolle

Θέτουμε $h(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(x)-g(a)), x\in[a,b]$

h: συνεχής στο $[a,b]$, παρ/μη στο (a,b) και $h(a)=h(b)=0$

Rolle $\Rightarrow$ $\exists\xi\in(a,b)$ τ.ω. $h'(\xi)=0$

$$\Rightarrow 0=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi) \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν $0<a<b<\frac{\pi}{2}$, τότε $\exists\theta\in(a,b)$: $\dfrac{\eta\mu a-\eta\mu b}{\sigma\upsilon\nu b-\sigma\upsilon\nu a}=\varepsilon\varphi\theta$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να δείξουμε το (i)

Έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$.

Από ΘΜΤ στο $[x_1, x_2]$, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ τ.ω. $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$\xrightarrow[\text{ή } f'(\xi)>0]{f'(\xi)\geq 0} f(x_2)-f(x_1) \geq 0$ (αντ. $f(x_2)-f(x_1) > 0$)

$\Rightarrow f$: αύξουσα (αντ. γν. αύξουσα)

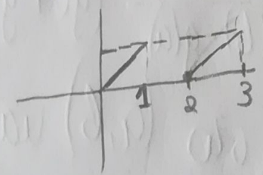
· Αν f γν. αύξουσα $\Rightarrow f' \geq 0 \;\not\Longrightarrow\; f' > 0$ (π.χ. $f(x) = x^3$)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: A \xrightarrow{\neq \emptyset} \mathbb{R}$ αύξουσα και $x_0 \in A \cap A'$. Αν η f είναι παράγωγη στο x_0, τότε $f'(x_0) > 0$

. ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ!!!

π.χ. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ x-2, & x \in [2,3) \end{cases}$ $\quad f'(x) = 1 > 0$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα, $\exists f'_{\pm}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'_-(x_0) \geq 0$, $f'_+(x_0) \geq 0$

(αν f φθίνουσα, τότε $f'_+(x_0) \leq 0$, $f'_-(x_0) \leq 0$)

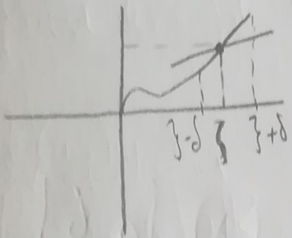
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέτουμε $f(x)=\eta\mu x$, $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[a,b]$

Από <u>ΘΜΤ (Cauchy)</u>: $\exists\, \theta\in(a,b) : \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu a-\eta\mu b}{\sigma\upsilon\nu b-\sigma\upsilon\nu a}=\sigma\varphi\theta$

$\left(\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}=\frac{\eta\mu\theta}{-\sigma\upsilon\nu\theta}\right), \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{\eta\mu b-\eta\mu a}{\sigma\upsilon\nu b-\sigma\upsilon\nu a}\right)$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ παρ/μη και για κάποιο $\xi\in(a,b)$



$\overset{;}{\Longrightarrow}$ f: αύξουσα σε μία περιοχή του ξ

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{2}x+x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=\frac{1}{2}+x\cdot\eta\mu x\Longrightarrow \boxed{f'(0)=\frac{1}{2}}$$

Αν $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{1}{2}+2x\eta\mu\frac{1}{x}-\eta\mu\frac{1}{x}$

Άρα f: παρ/μη παντού

Αν f αύξουσα σε μία περιοχή $(-\delta,\delta)$ του 0, τότε $f'(x)\geq 0, \forall x\in(-\delta,\delta)$

<u>Θ.δ.ο.</u> $\exists\{x_n\}$, με $x_n\to 0$ τ.ω. $f'(x_n)<0, \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow f$: δεν είναι αύξουσα στο $(-\delta,\delta)$ για κανένα $\delta>0$.

$$x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\Rightarrow \eta\mu\left(\frac{1}{x_n}\right)=1$$

$$\Rightarrow f'(x_n)=\frac{1}{2}+2x_n-1=-\frac{1}{2}+\frac{2}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}<0, \forall n\in\mathbb{N}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν f' συνεχής στο $x_0 \in I$ και $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$: αύξουσα σε μία περιοχή του x_0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$, τ.ω. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$, $f'(x) > 0$

$\Rightarrow f$: γν. αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$

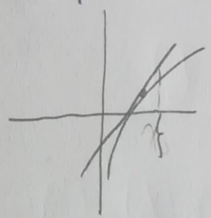
ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ παράγωγη στο $\xi \in [a,b]$

i) Αν $f'(\xi) > 0$ τότε $\exists \delta > 0$ τ.ω. $f(x) > f(\xi)$, $\forall x \in (\xi, \xi + \delta) \cap [a,b]$

και $f(x) < f(\xi)$, $\forall x \in (\xi - \delta, \xi) \cap [a,b]$

ii) Αν $f'(\xi) < 0$, τότε $\exists \delta > 0$ τ.ω. οι ανισότητες να αντιστρέφονται.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) $f'(\xi) > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$

$\lim\limits_{x \to \xi^+} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$: $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} > 0$, $\forall x \in (\xi, \xi + \delta_1)$

$\Rightarrow f(x) > f(\xi)$, $\forall x \in (\xi, \xi + \delta_1)$

Ομοίως $\exists \delta_2 > 0$, τ.ω. $\forall x \in (\xi - \delta_2, \xi)$, $f(x) \leq f(\xi)$

Για $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ έχουμε το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, παρ/μη στο $[a,b]$. Έστω ότι $f'(a)\cdot f'(b)<0$.

Τότε, $\exists\, \xi\in(a,b)$ τ.ω. $f'(\xi)=0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω π.χ. ότι $f'(a)<0<f'(b)$

ΠΡΟΤΑΣΗ $(\xi=a)$ $\Rightarrow$ $\exists\,\delta_1>0$, τ.ω. $\forall x\in(a,a+\delta_1)$, $f(x)<f(a)$

$\exists\,\delta_2>0$, τ.ω. $\forall x\in(b-\delta_2,b)$, $f(x)<f(b)$

$\Rightarrow f(a), f(b)$ όχι ολικά ελάχιστα της f.

f παρ/μη στο $[a,b] \Rightarrow f$ συνεχής στο $[a,b]$

$\Rightarrow \exists\,\xi\in[a,b]$ τ.ω. ξ: σημείο ολικού ελαχίστου

όμως $\xi\neq a,b \Rightarrow \xi$: σημείο τοπικού ελαχίστου της f

$\Rightarrow f'(\xi)=0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Darboux)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ παρ/μη. Τότε η f' λαμβάνει κάθε τιμή μεταξύ των $f'(a)$ και $f'(b)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $k\in\mathbb{R}$ μεταξύ των $f'(a)$ και $f'(b)$. Θέτουμε $g(x)=f(x)-k\cdot x$

$\Rightarrow g'(a)\cdot g'(b)\leq 0$. Αν $g'(a)\cdot g'(b)=0$, τέλος.

Αν $g'(a)g'(b)<0 \Rightarrow \exists\,\xi\in(a,b)$ με $g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=k$

Αν $f'(\xi)>0$ τότε $\exists \delta>0$, τ.ω. $\forall x\in(\xi,\xi+\delta)$, $f(x)>f(\xi)$ και
$\forall x\in(\xi-\delta,\xi)$, $f(x)<f(\xi)$

ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ **ΔΕΝ** ΙΣΧΥΕΙ!! (π.χ. $f(x)=x^3$, $\xi=0$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ν.δ.ο. $e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$, $\forall x>0$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$, $x>0$

$e^x>1+x$, $\forall x\neq 0$

$f(0)=0$

$f'(x)=e^x-1-x>0$, $\forall x\neq 0$

$\Rightarrow f$ γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$

$\Rightarrow f$ —||— —||— $[0,+\infty)$

$\Rightarrow \forall x>0$, $f(x)>f(0)=0$

$f(x) = e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$, $\forall x>0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$(1+x)^a \geq 1+ax$, $x>-1$
$a\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

ΛΥΣΗ

$f(x)=(1+x)^a-1-ax$

$f'(x)=a(1+x)^{a-1}-a=a\left[(1+x)^{a-1}-1\right]$

· Αν $\boxed{a\geq 1}$: $\left.\begin{matrix} x>-1 \\ a-1>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (1+x)>0 \Rightarrow (1+x)^{a-1}>1 \Rightarrow f'(x)\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$: αύξουσα στο $(0,\infty)$ και φθίνουσα στο $(-1,0)$

(όταν $1+x\geq 1$ και $(1+x)^{a-1}<1$ όταν $1+x<1$)

$\Rightarrow \forall x\in(-1,0): f(x)\geq f(0)$

$\forall x\in(0,+\infty): f(x)\geq f(0)$

$\Rightarrow f(x)\geq f(0)(=0), \forall x\in(-1,\infty)$

$\Rightarrow (1+x)^a\geq 1+ax, \forall x>-1$

· Αν $\boxed{a<0}$

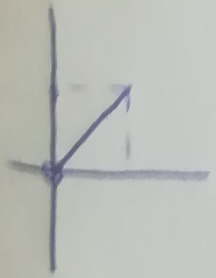
- Για $\boxed{x\geq 0}$: $1+x\geq 1 \xrightarrow{a-1<0} (1+x)^{a-1}\leq 1^{a-1}=1$

$\Rightarrow f'(x)\geq 0 \Rightarrow f$: αύξουσα στο $[0,+\infty)$

- Για $\boxed{x<0}$: $1+x\leq 1 \Rightarrow (1+x)^{a-1}\geq 1 \Rightarrow (1+x)^{a-1}-1\geq 0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$: φθίνουσα στο $(-1,0]$

όπως πριν, $f(x)\geq \underset{0}{\underset{\parallel}{f(0)}}, \forall x\in(-1,\infty) \Rightarrow (1+x)^a\geq 1+ax, \forall x>-1$



$f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$f(0)=1$, $f(x)=x$, $x\in(0,1]$

f όχι συνεχής στο $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ υπάρχει

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ!!!)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής, παρ/μη στο (a,b). Αν $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$ τότε $\underbrace{f'_+(a)}_{f'(a)}=\ell$

(ομοίως αν $x\to b^-$ ή $x\to c$, όπου $c\in(a,b)$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists\,\delta>0$, τ.ω. $\forall x\in(a,a+\delta)$:

$|f'(x)-\ell|<\varepsilon$ (1)

Έστω $x\in(a,a+\delta)$. Από Θ.Μ.Τ. $\exists\,\xi\in(a,x)\subseteq(a,a+\delta)$ τ.ω. $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Επειδή $\xi\in(a,a+\delta) \xrightarrow{(1)} |f'(\xi)-\ell|<\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\ell\right|<\varepsilon$, $\forall x\in(a,a+\delta)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell \Rightarrow \boxed{f'_+(a)=\ell}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το αντίστροφο δεν ισχύει!!!

π.χ. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot x+x^2\cdot \eta\mu\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$

ΛΥΣΗ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1 : $l \in \mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists \delta > 0$ τ.ω. $\forall x \in (a, a+\delta)$, $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon/2$ (1)

Έστω $a < x_1 < x < a+\delta$

Από ΘΜΤ (Cauchy): $\exists \xi \in (x_1, x) \subseteq (a, a+\delta)$: $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}$

$$\xi \in (a, a+\delta) \xRightarrow{(1)} \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\xRightarrow{x_1 \to a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \forall x \in (a, a+\delta)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2 : $l = \pm\infty$ (όμοια για $l = -\infty$)

Έστω $M > 0$. $\exists \delta > 0$, τ.ω. $\forall x \in (a, a+\delta)$, $\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{4M}{2} = 2M$

Έστω $a < x_1 < x < a+\delta$. Από ΘΜΤ (Cauchy) : $\exists \xi \in (x_1, x) \subseteq (a, a+\delta)$ τ.ω.

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 2M \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} > 2M$$

$$\xRightarrow{x_1 \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \geq 2M > M, \ \forall x \in (a, a+\delta)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty = l$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (3) (Κανόνας L'Hospital 2 $\left(\frac{0}{0}\right)$)

Έστω $f,g:(a,\infty)\to\mathbb{R}$ παρ/μες με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Αν $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$

Ομοίως αν $f,g:(-\infty,a)\to\mathbb{R}$ με τις ίδιες ιδιότητες απλώς για $-\infty$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $F,G:\left(0,\frac{1}{a}\right)\to\mathbb{R}$, $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$

$\Rightarrow \lim_{t\to0^+} F(t) = 0 = \lim_{t\to0^+} G(t)$

$\xRightarrow{\Theta.2} \lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to0^+}\frac{\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\cancel{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}\cdot g'\left(\frac{1}{t}\right)} \overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=} \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

ΘΕΩΡΗΜΑ (4) (Κανόνας L'Hospital $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$)

Έστω $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ παρ/μες με $g'(x)\neq0, \forall x\in(a,b)$ και $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l\in\overline{\mathbb{R}}$. Αν $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = l$

(Ομοίως, αν $x\to b^-$, $x\to c$, όπου $c\in(a,b)$, αν $f,g:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ ή $f,g:(-\infty,a)\to\mathbb{R}$ και $x\to\pm\infty$)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Στο Θ.4 δεν χρειάζεται $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

2) Στα Θ2, Θ3, Θ4 αν $\exists \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\in\overline{\mathbb{R}} \not\Rightarrow \exists \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

2 **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}, \quad g(x)=\eta\mu x$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}{\eta\mu x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\eta\mu x}\right)\cdot\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$$

$$f'(x)=2x\cdot\eta\mu\cdot\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, \quad x\neq 0$$

$$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{2x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1, \quad \lim_{x\to 0^+}2x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει: Θέτουμε $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{x_n}\right)=1\to 1$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{y_n}\right)=0\to 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

① $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}\ \left(\frac{0}{0}\right)$

ΛΥΣΗ

$$\frac{(\eta\mu x)'}{(\sqrt{x})'}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2\sqrt{x}\cdot\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{(\eta\mu x)'}{(\sqrt{x})'}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}=0$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot e^x - \ln(1+x)}{x^2} \left(\frac{0}{0}\right)$

$\frac{(x e^x - \ln(1+x))'}{(x^2)'} = \frac{x \cdot e^x + e^x - \frac{1}{1+x}}{2x} \left(\frac{0}{0}\right)$

$\frac{\left(x \cdot e^x + e^x - \frac{1}{1+x}\right)'}{(2x)'} = \frac{2e^x + x \cdot e^x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2} \xrightarrow{x \to 0} \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{[x \cdot e^x - \ln(1+x)]'}{(x^2)'} = \frac{3}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot e^x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{3}{2}$